

Nastupno predavanje

# DEFINICIJA DERIVACIJE

08. lipnja, 2006.

Građevinski fakultet u Osijeku

mr.sc. Josipa Matotek, prof.

# Povijesni dvoboj

**sir Isac Newton (1643.-1727.)**  
- engleski fizičar i matematičar

*Problem:* kako definirati brzinu?

$$s = s(t), t \geq 0$$

- gibanje je jednoliko,  $s$  je linearna:

$$s(t) = vt + b$$

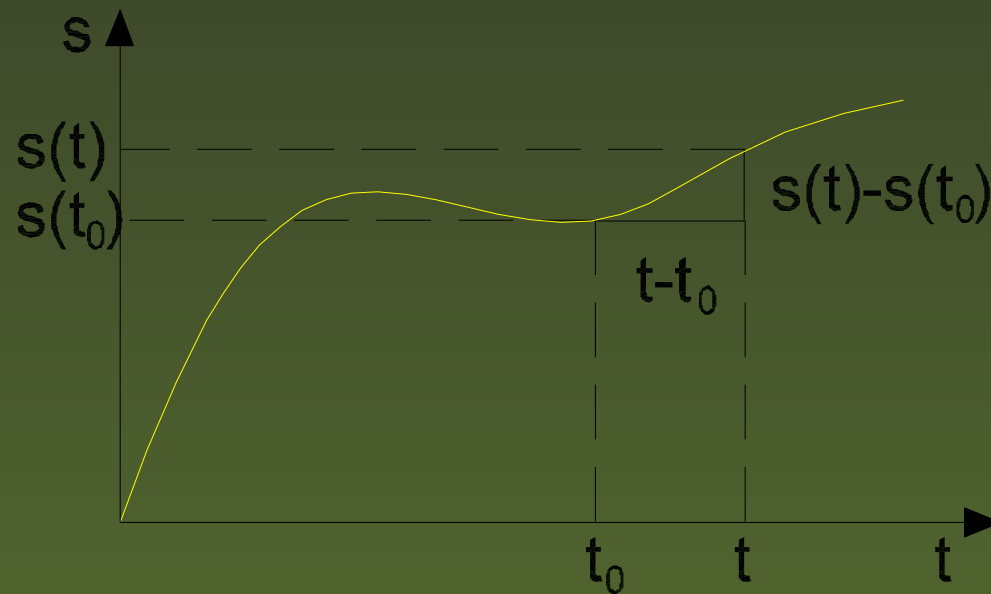
$$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

brzina je konstantna!

# Povijesni dvoboj

- gibanje je nejednoliko,  $s$  nije linearna

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$



# Povijesni dvoboj

---

**Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.)**  
- njemački matematičar, filozof i pisac.

# Povijesni dvoboj

---

**Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.)**  
- njemački matematičar, filozof i pisac.

*Problem:* kako odrediti tangentu u točki  $T_0(x_0, y_0)$  neke funkcije  $f$ ?

# Povijesni dvoboj

---

**Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.)**  
- njemački matematičar, filozof i pisac.

*Problem:* kako odrediti tangentu u točki  $T_0(x_0, y_0)$  neke funkcije  $f$ ?

odrediti koeficijent smjera sekante kroz točke  $T_0(x_0, f(x_0))$  i  $T(x, f(x))$ : **(slika)**

# Povijesni dvoboj

**Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.)**  
- njemački matematičar, filozof i pisac.

*Problem:* kako odrediti tangentu u točki  $T_0(x_0, y_0)$  neke funkcije  $f$ ?

odrediti koeficijent smjera sekante kroz točke  $T_0(x_0, f(x_0))$  i  $T(x, f(x))$ : **(slika)**

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

# Povijesni dvoboj

**Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.)**  
- njemački matematičar, filozof i pisac.

*Problem:* kako odrediti tangentu u točki  $T_0(x_0, y_0)$  neke funkcije  $f$ ?

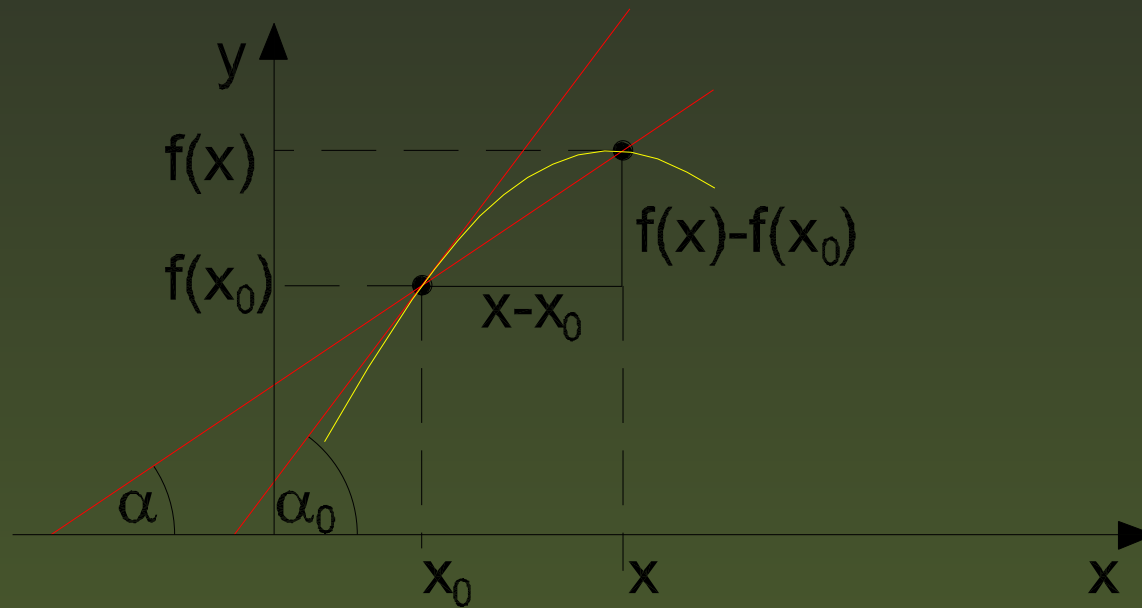
odrediti koeficijent smjera sekante kroz točke  $T_0(x_0, f(x_0))$  i  $T(x, f(x))$ : (slika)

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

kada  $x \rightarrow x_0$  vrijedi:

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

# Povijesni dvoboj



# Definicija derivacije

---

- Za funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $I$  otvoreni interval, kažemo da je *derivabilna u točki* (diferencijabilna u točki)  $x_0 \in I$ , ako postoji limes

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

# Definicija derivacije

- Za funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $I$  otvoreni interval, kažemo da je *derivabilna u točki* (diferencijabilna u točki)  $x_0 \in I$ , ako postoji limes

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

- Broj  $f'(x_0)$  nazivamo *derivacija funkcije  $f$  u točki  $x_0$* .

# Definicija derivacije

---

- Funkcija  $f : (a, b) \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  je *derivabilna na intervalu*  $(a, b)$ , ako je derivabilna u svakoj točki toga intervala  $x_0 \in (a, b)$ .

# Definicija derivacije

---

- Funkcija  $f : (a, b) \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  je *derivabilna na intervalu*  $(a, b)$ , ako je derivabilna u svakoj točki toga intervala  $x_0 \in (a, b)$ .
- Ako je  $(a, b) = I$ , tada kažemo da je funkcija  $f$  derivabilna.

# Definicija derivacije

---

- Funkcija  $f : (a, b) \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  je *derivabilna na intervalu*  $(a, b)$ , ako je derivabilna u svakoj točki toga intervala  $x_0 \in (a, b)$ .
- Ako je  $(a, b) = I$ , tada kažemo da je funkcija  $f$  derivabilna.
- Funkciju  $f' : (a, b) \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo *derivacija*.

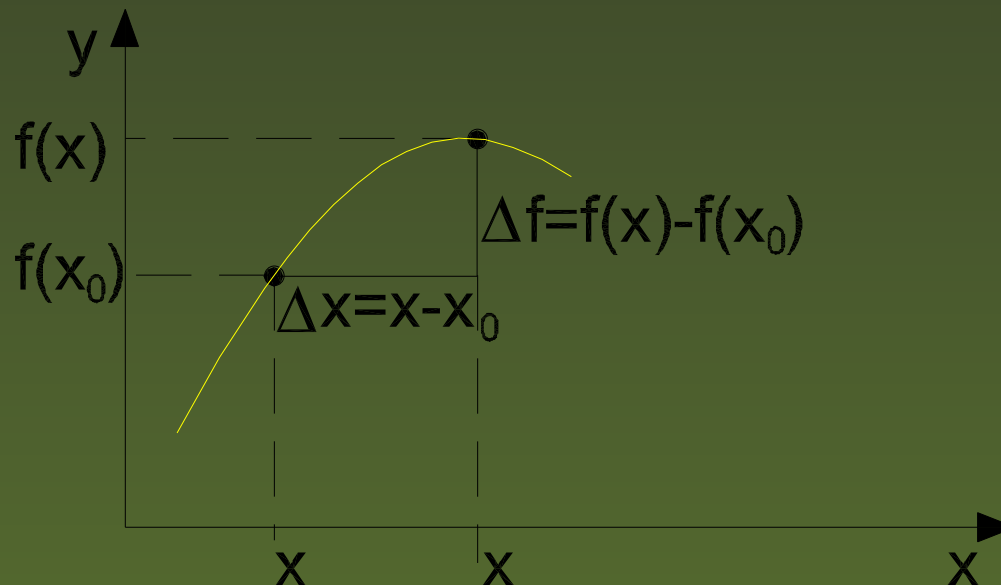
# Ekvivalentna definicija derivacije

- $\Delta x \equiv x - x_0$

*Prirast nezavisne varijable  $x$  u točki  $x_0$*

- $\Delta f(x_0) \equiv f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

*$\Delta f$  prirast funkcije  $f$  u točki  $x_0$*



# Ekvivalentna definicija derivacije

---

iz definicije slijedi:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

# Ekvivalentna definicija derivacije

iz definicije slijedi:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ili

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# Ekvivalentna definicija derivacije

iz definicije slijedi:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ili

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ili

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

# Notacija derivacije

## ■ Lagrange-ova:

prva derivacija	$f'(x)$
druga derivacija	$f''(x)$
n-ta derivacija	$f^{(n)}(x)$
prva derivacija u točki	$f'(x_0)$

## ■ Newton-ova:

prva derivacija	$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$
prva derivacija u točki	$v(t_0) = \dot{s}(t_0)$

# Notacija derivacije

## ■ Leibniz-ova:

prva derivacija	$\frac{d(f(x))}{dx}$
druga derivacija	$\frac{d}{dx} \left( \frac{d(f(x))}{dx} \right) = \frac{d^2(f(x))}{dx^2}$
prva derivacija u točki	$\frac{d(f(x_0))}{dx}$

# Interpretacija derivacije

---

## Aproksimacija

Cilj: aproksimirati funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  u okolini točke  $x_0$  linearnom funkcijom

$$l = ax + b$$

Iz pretpostavljenog uvjeta

$$f(x_0) = l(x_0)$$

slijedi

$$l(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$$

# Interpretacija derivacije

---

$a$  izabiremo tako da  $\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}$  bude što manje, pa slijedi

$$\frac{(f(x) - f(x_0)) - a(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow 0$$

# Interpretacija derivacije

$a$  izabiremo tako da  $\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}$  bude što manje, pa slijedi

$$\frac{(f(x) - f(x_0)) - a(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow a$$

# Interpretacija derivacije

$a$  izabiremo tako da  $\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}$  bude što manje, pa slijedi

$$\frac{(f(x) - f(x_0)) - a(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow a$$

$$\Rightarrow a = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

# Interpretacija derivacije

$a$  izabiremo tako da  $\frac{f(x)-l(x)}{x-x_0}$  bude što manje, pa slijedi

$$\frac{(f(x) - f(x_0)) - a(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow a$$

$$\Rightarrow a = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow l(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

# Interpretacija derivacije

## Tangenta

$$\text{(Leibniz)} \quad k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

slika

Derivacija u točki neke krivulje je koeficijent smjera tangente na krivulji u toj točki, odnosno jednaka je  $\tan \alpha$ .

# Interpretacija derivacije

---

- $k > 0 \Rightarrow f'(x_0) > 0 \Rightarrow$  funkcija  $f$  raste u točki  $x_0$

# Interpretacija derivacije

---

- $k > 0 \Rightarrow f'(x_0) > 0 \Rightarrow$  funkcija  $f$  raste u točki  $x_0$
- $k < 0 \Rightarrow f'(x_0) < 0 \Rightarrow$  funkcija  $f$  pada u točki  $x_0$

# Interpretacija derivacije

---

- $k > 0 \Rightarrow f'(x_0) > 0 \Rightarrow$  funkcija  $f$  raste u točki  $x_0$
- $k < 0 \Rightarrow f'(x_0) < 0 \Rightarrow$  funkcija  $f$  pada u točki  $x_0$
- $k = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow$  tangenta u točki  $x_0$  je paralelna s  $x$  osi

# Interpretacija derivacije

---

## Mjera promjene

Za derivaciju se još kaže  
da je mjera promjene

# Interpretacija derivacije

---

Pretpostavimo da je količina vode u bazenu u danom trenutku  $t$  mjerenim minutama prikazana formulom

$$V(t) = 2t^2 - 16t + 35.$$

- (a) Da li se volumen vode u bazenu povećava ili smanjuje za  $t = 1$  minuta?

# Interpretacija derivacije

---

Pretpostavimo da je količina vode u bazenu u danom trenutku  $t$  mjerenim minutama prikazana formulom

$$V(t) = 2t^2 - 16t + 35.$$

- (a) Da li se volumen vode u bazenu povećava ili smanjuje za  $t = 1$  minuta?
- (b) Da li se volumen vode u bazenu povećava ili smanjuje za  $t = 5$  minuta?

# Interpretacija derivacije

Pretpostavimo da je količina vode u bazenu u danom trenutku  $t$  mjerenim minutama prikazana formulom

$$V(t) = 2t^2 - 16t + 35.$$

- (a) Da li se volumen vode u bazenu povećava ili smanjuje za  $t = 1$  minuta?
- (b) Da li se volumen vode u bazenu povećava ili smanjuje za  $t = 5$  minuta?
- (c) Da li se brže mijenja volumen u trenutku  $t = 1$  minuta ili  $t = 5$  minuta?

# Interpretacija derivacije

Pretpostavimo da je količina vode u bazenu u danom trenutku  $t$  mjerenim minutama prikazana formulom

$$V(t) = 2t^2 - 16t + 35.$$

- (a) Da li se volumen vode u bazenu povećava ili smanjuje za  $t = 1$  minuta?
- (b) Da li se volumen vode u bazenu povećava ili smanjuje za  $t = 5$  minuta?
- (c) Da li se brže mijenja volumen u trenutku  $t = 1$  minuta ili  $t = 5$  minuta?
- (d) Da li u nekom trenutku volumen vode u bazenu ostaje nepromjenjiv? Ako da, u kojem je to trenutku?

# Interpretacija derivacije

---

Rješenje:  $V'(t) = 4t - 16$

(a)  $V'(1) = -12 \Rightarrow$  u trenutku  $t = 1$  minuta volumen vode u bazenu se smanjuje.

# Interpretacija derivacije

---

Rješenje:  $V'(t) = 4t - 16$

- (a)  $V'(1) = -12 \Rightarrow$  u trenutku  $t = 1$  minuta volumen vode u bazenu se smanjuje.
- (b)  $V'(5) = 4 \Rightarrow$  u trenutku  $t = 5$  minuta volumen vode u bazenu se povećava.

# Interpretacija derivacije

---

Rješenje:  $V'(t) = 4t - 16$

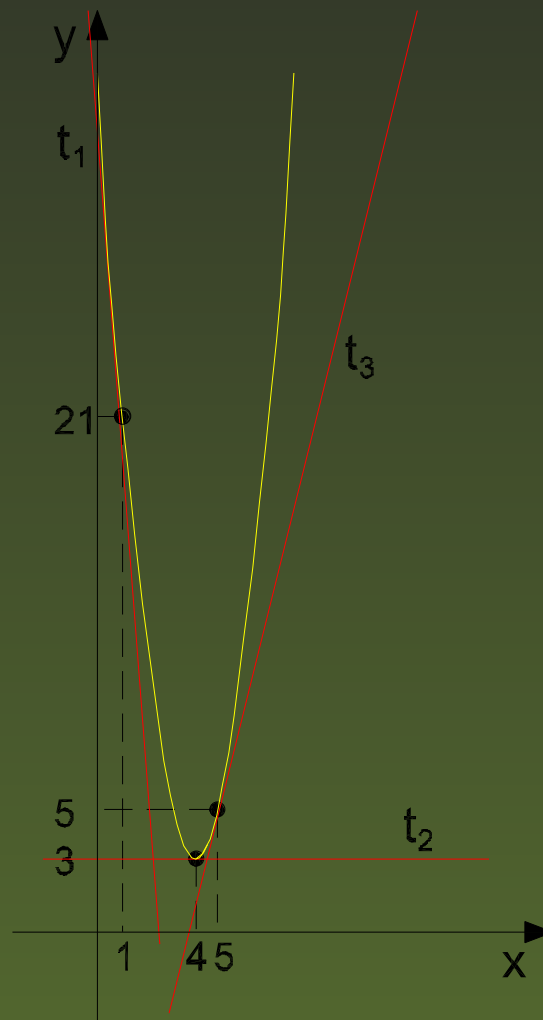
- (a)  $V'(1) = -12 \Rightarrow$  u trenutku  $t = 1$  minuta volumen vode u bazenu se smanjuje.
- (b)  $V'(5) = 4 \Rightarrow$  u trenutku  $t = 5$  minuta volumen vode u bazenu se povećava.
- (c)  $|-12| > |4| \Rightarrow$  brzina promjene volumena u bazenu u trenutku  $t = 1$  minuta je veća nego u trenutku  $t = 5$  minuta.

# Interpretacija derivacije

Rješenje:  $V'(t) = 4t - 16$

- (a)  $V'(1) = -12 \Rightarrow$  u trenutku  $t = 1$  minuta volumen vode u bazenu se smanjuje.
- (b)  $V'(5) = 4 \Rightarrow$  u trenutku  $t = 5$  minuta volumen vode u bazenu se povećava.
- (c)  $|-12| > |4| \Rightarrow$  brzina promjene volumena u bazenu u trenutku  $t = 1$  minuta je veća nego u trenutku  $t = 5$  minuta.
- (d)  $V'(t) = 0 \Rightarrow 4t - 16 = 0 \Rightarrow t = 4$   
Znači za  $t = 4$  minute volumen vode u bazenu se ne mijenja.

# Interpretacija derivacije



# Interpretacija derivacije

---

## Brzina

(Newton) 
$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

Za brzinu se kaže  
da derivacija puta po vremenu

# Interpretacija derivacije

---

*Primjer:*

Pretpostavimo da je položaj nekog objekta nakon  $t$  sati gibanja dan jednačbom

$$s(t) = \frac{t}{t + 1}.$$

- (a) Da li se objekt giba prema lijevo ili prema desno u vremenu  $t = 10$  sati?

# Interpretacija derivacije

---

*Primjer:*

Pretpostavimo da je položaj nekog objekta nakon  $t$  sati gibanja dan jednadžbom

$$s(t) = \frac{t}{t + 1}.$$

- (a) Da li se objekt giba prema lijevo ili prema desno u vremenu  $t = 10$  sati?
- (b) Da li se objekt prestaje gibati u nekom trenutku?

# Interpretacija derivacije

---

Rješenje:  $s'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$

(a)  $s'(10) = \frac{1}{(10+1)^2} \Rightarrow$  u trenutku  $t = 10$  objekt se giba prema desno (zato što je brzina pozitivna).

$$v(t) = s'(t) > 0, \forall t$$

# Interpretacija derivacije

Rješenje:  $s'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$

(a)  $s'(10) = \frac{1}{(10+1)^2} \Rightarrow$  u trenutku  $t = 10$  objekt se giba prema desno (zato što je brzina pozitivna).

$$v(t) = s'(t) > 0, \forall t$$

(b)  $v(t) = s'(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(t+1)^2} = 0 \Rightarrow$  tijelo se ne prestaje gibati niti za jedan  $t$ , jer je

$$\frac{1}{(t+1)^2} \neq 0, \forall t.$$