Nastupno predavanje: "Definicija derivacije"
mr.sc.J. Matotek

Prilog

Primjer: Derivirajte funkciju $f(x) = cx$, koristeći definiciju derivacije (svejedno koju).

Rješenje:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c(x+\Delta x)-cx}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{cx+c\Delta x-cx}{\Delta x} \\ &= c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = c \end{aligned}$$

Primjer: Derivirajte funkciju $f(x) = 2x^2 - 16x + 35$, koristeći definiciju derivacije (svejedno koju).

Rješenje:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= 2(x+\Delta x)^2 - 16(x+\Delta x) + 35 \\ &= 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 16x - 16\Delta x + 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 16x - 16\Delta x + 35 - 2x^2 + 16x - 35}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(4x + 2\Delta x - 16}{\Delta x} \\ &= 4x - 16 \end{aligned}$$

Primjer: Derivirajte funkciju $f(x) = \frac{x}{x+1}$, koristeći definiciju derivacije (svejedno koju).

Rješenje: $f(x+\Delta x) = \frac{x+\Delta x}{x+\Delta x+1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x+1} - \frac{x}{x+1}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x+\Delta x) - cx}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x^2+x+x\Delta x+\Delta x-x^2-x\Delta x-x}{(x+\Delta x+1)(x+1)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+\Delta x+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Primjer: Zadan je polinom $f(x) = 2x^2 - 16x + 35$. Odredite jednadžbe tangenti u točkama $x = 1$, $x = 4$, i $x = 5$.

Rješenje:

$$f'(x) = 4x - 16$$

Jednadžba tangente glasi $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = f(1) = 21$ i $f'(x_0) = f'(1) = -12$

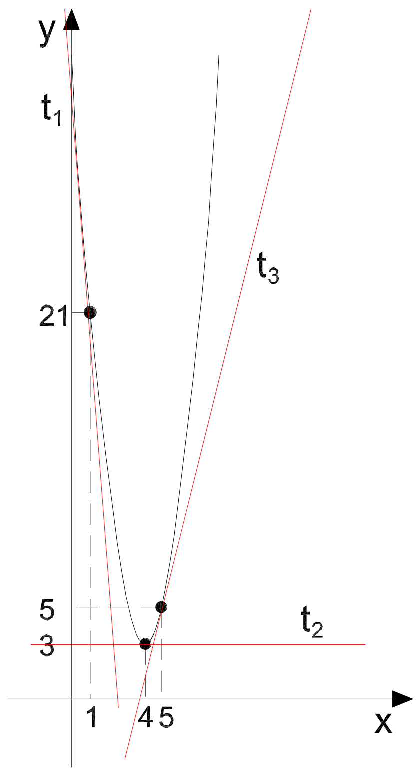
$$f(x) = -12x + 33$$

$x_0 = 4 \Rightarrow f(x_0) = f(4) = 3$ i $f'(x_0) = f'(4) = 0$

$$f(x) = 3$$

$x_0 = 5 \Rightarrow f(x_0) = f(5) = 5$ i $f'(x_0) = f'(5) = 4$

$$f(x) = 4x - 15$$



Primjer: Odredite koordinate tjemena parabole $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Rješenje: U tjemenu, parabola postiže ekstrem, u toj točki je dakle tangenta na parabolu paralelna s x-osi, pa je stoga $f'(x) = 0$!

$$2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

pa je

$$y = f(x) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + b \cdot \frac{-b}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$\boxed{T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)}$$