

1. predavanje

# 1. NEODREĐENI INTEGRAL

05. ožujka, 2010.

Građevinski fakultet u Osijeku

mr.sc. Josipa Matotek, prof.

# 1.1 Antiderivacija

---

- Prisjetimo se pojma derivacije i matematičara koji su se njome bavili!

# 1.1 Antiderivacija

---

- Prisjetimo se pojma derivacije i matematičara koji su se njome bavili!
  - **sir Isac Newton** (1642.-1727.)
    - engleski fizičar i matematičar, proučavao je problem brzine

# 1.1 Antiderivacija

---

- Prisjetimo se pojma derivacije i matematičara koji su se njome bavili!
  - **sir Isac Newton** (1642.-1727.)
    - engleski fizičar i matematičar, proučavao je problem brzine
  - **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646.-1716.)
    - njemački matematičar, filozof i pisac, proučavao je problem tangente.

# 1.1 Antiderivacija

---

- Prisjetimo se pojma derivacije i matematičara koji su se njome bavili!
  - **sir Isac Newton** (1642.-1727.)
    - engleski fizičar i matematičar, proučavao je problem brzine
  - **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646.-1716.)
    - njemački matematičar, filozof i pisac, proučavao je problem tangente.
- Začetnici su ideje o integralnom računu

# 1.1 Antiderivacija

---

- *Ideja*: neka nam je poznata derivacija neke funkcije, želimo izračunati samu funkciju!

**Primjer 1:** Neka je  $F'(x) = 2x$ , koliko iznosi funkcija  $F(x)$ ?

# 1.1 Antiderivacija

---

- *Ideja*: neka nam je poznata derivacija neke funkcije, želimo izračunati samu funkciju!

**Primjer 1:** Neka je  $F'(x) = 2x$ , koliko iznosi funkcija  $F(x)$ ?

Rješenja:  $F(x) = x^2$

# 1.1 Antiderivacija

- *Ideja*: neka nam je poznata derivacija neke funkcije, želimo izračunati samu funkciju!

**Primjer 1:** Neka je  $F'(x) = 2x$ , koliko iznosi funkcija  $F(x)$ ?

Rješenja:

$$F(x) = x^2$$

$$F(x) = x^2 + 1$$

# 1.1 Antiderivacija

- *Ideja*: neka nam je poznata derivacija neke funkcije, želimo izračunati samu funkciju!

**Primjer 1:** Neka je  $F'(x) = 2x$ , koliko iznosi funkcija  $F(x)$ ?

Rješenja:  $F(x) = x^2$

$$F(x) = x^2 + 1$$

$$F(x) = x^2 + 5$$

*Zaključak:* RJEŠENJE NIJE JEDINSTVENO!!!

# 1.1 Antiderivacija

---

Pitanja:

- Koliko rješenja ima Primjer 1?
- Za koliko se razlikuju ta rješenja?

# 1.1 Antiderivacija

---

Pitanja:

- Koliko rješenja ima Primjer 1?
- Za koliko se razlikuju ta rješenja?

**Definicija 1:** Funkcija  $F(x)$  je *antiderivacija* ili *primitivna (prim) funkcija* funkcije  $f(x)$  na području  $D$ , ako za svaki  $x \in D$  vrijedi:

$$F'(x) = f(x).$$

# 1.1 Antiderivacija

---

**Primjer 2:** Provjerite da li je funkcija  $F(x)$  antiderivacija funkcije  $f(x)$ , ako je:

a) 
$$F(x) = 3x^4 + \sin x - 2$$

$$f(x) = 12x^3 + \cos x$$

# 1.1 Antiderivacija

**Primjer 2:** Provjerite da li je funkcija  $F(x)$  antiderivacija funkcije  $f(x)$ , ako je:

a) 
$$F(x) = 3x^4 + \sin x - 2$$

$$f(x) = 12x^3 + \cos x$$

Rješenje: Provjerimo da li vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

# 1.1 Antiderivacija

**Primjer 2:** Provjerite da li je funkcija  $F(x)$  antiderivacija funkcije  $f(x)$ , ako je:

a) 
$$F(x) = 3x^4 + \sin x - 2$$

$$f(x) = 12x^3 + \cos x$$

Rješenje: Provjerimo da li vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

$$F'(x) = 12x^3 + \cos x = f(x),$$

# 1.1 Antiderivacija

**Primjer 2:** Provjerite da li je funkcija  $F(x)$  antiderivacija funkcije  $f(x)$ , ako je:

a) 
$$F(x) = 3x^4 + \sin x - 2$$

$$f(x) = 12x^3 + \cos x$$

Rješenje: Provjerimo da li vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

$$F'(x) = 12x^3 + \cos x = f(x),$$

znači funkcija  $F(x)$  je antiderivacija funkcije  $f(x)$ .

# 1.1 Antiderivacija

---

b) 
$$F(x) = 2x^5 e^x + 3x$$

$$f(x) = 2x^4 e^x (5 + x) + 2$$

Rješenje: Provjerimo da li vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

# 1.1 Antiderivacija

---

b) 
$$F(x) = 2x^5e^x + 3x$$

$$f(x) = 2x^4e^x(5 + x) + 2$$

Rješenje: Provjerimo da li vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

$$F'(x) = 10x^4e^x + 2x^5e^x + 3 = 2x^4e^x(5 + x) + 3 \neq f(x),$$

# 1.1 Antiderivacija

b) 
$$F(x) = 2x^5e^x + 3x$$

$$f(x) = 2x^4e^x(5 + x) + 2$$

Rješenje: Provjerimo da li vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

$$F'(x) = 10x^4e^x + 2x^5e^x + 3 = 2x^4e^x(5 + x) + 3 \neq f(x),$$

znači funkcija  $F(x)$  **nije** antiderivacija funkcije  $f(x)$ .

# 1.1 Antiderivacija

**Primjer 3:** Pronađite tri antiderivacije funkcije

$$f(x) = 3x^2 + x + 4.$$

Rješenje: Mi tražimo funkcije  $F(x)$  za koje vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

$$F_1(x) = 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x$$

$$F_2(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 4x + 3$$

$$F_3(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 4x - 2$$

# 1.1 Antiderivacija

**Teorem 1:** Neka su  $F_1(x)$  i  $F_2(x)$  dvije primitivne funkcije funkcije  $f(x)$ , tada postoji konstanta  $c$  takva da vrijedi:

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

**Dokaz:** po Definiciji 1 vrijedi

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x).$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = 0$$

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

# 1.1 Antiderivacija

---

Opisno rečeno:

Sve primitivne funkcije  
neke iste funkcije  
razlikuju se za  
proizvoljnu konstantu  $c$ .

# 1.1 Antiderivacija

**Primjer 3:** Pronađite onu primitivnu funkciju  $F(x)$ , funkcije  $f(x) = \frac{2}{x} + 7x^6$ , za koju vrijedi  $F(1) = 3$ .

Rješenje:

$$F(x) = 2 \ln |x| + x^7 + c$$

$$F(1) = 2 \ln 1 + 1^7 + c = 3$$

$$c = 3 - 1 = 2$$

$$F(x) = 2 \ln |x| + x^7 + 2$$

# 1.1 Antiderivacija

- postupak antideriviranja je znatno teži od postupka deriviranja
- antiderivacije mnogih funkcija se ne mogu izraziti uz pomoć elementarnih funkcija

$$f(x) = \sin(x^2), \quad f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

- pravila za antideriviranje su ista kao i za deriviranje

# 1.1 Antiderivacija

---

Neka su  $F(x)$  i  $G(x)$  antiderivacije redom funkcija  $f(x)$  i  $g(x)$ , tada vrijedi:

- $F(x) + G(x)$  je antiderivacija od  $f(x) + g(x)$
- $F(x) - G(x)$  je antiderivacija od  $f(x) - g(x)$
- $cF(x)$  je antiderivacija od  $cf(x)$

# 1.1 Antiderivacija

**Teorem o antiderivaciji 2:** Ako je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval i ako je  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija, onda postoji derivabilna funkcija  $F(x)$  za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

ili

Za svaku neprekidnu funkciju  
postoji antiderivacija,  
tj. primitivna funkcija.

# 1.2 Neodređeni integral

- proces pronalaženja antiderivacije se naziva *integracija*

**Definicija 2:** Ako je  $F(x)$  primitivna funkcija (antiderivacija) funkcije  $f(x)$ , tada se skup svih primitivnih funkcija  $\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$  funkcije  $f(x)$  naziva *neodređeni integral* funkcije  $f(x)$ , i označava se

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

# 1.2 Neodređeni integral

- proces pronalaženja antiderivacije se naziva *integracija*

**Definicija 2:** Ako je  $F(x)$  primitivna funkcija (antiderivacija) funkcije  $f(x)$ , tada se skup svih primitivnih funkcija  $\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$  funkcije  $f(x)$  naziva *neodređeni integral* funkcije  $f(x)$ , i označava se

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

integral

# 1.2 Neodređeni integral

- proces pronalaženja antiderivacije se naziva *integracija*

**Definicija 2:** Ako je  $F(x)$  primitivna funkcija (antiderivacija) funkcije  $f(x)$ , tada se skup svih primitivnih funkcija  $\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$  funkcije  $f(x)$  naziva *neodređeni integral* funkcije  $f(x)$ , i označava se

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

podintegralna funkcija, integrand

# 1.2 Neodređeni integral

- proces pronalaženja antiderivacije se naziva *integracija*

**Definicija 2:** Ako je  $F(x)$  primitivna funkcija (antiderivacija) funkcije  $f(x)$ , tada se skup svih primitivnih funkcija  $\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$  funkcije  $f(x)$  naziva *neodređeni integral* funkcije  $f(x)$ , i označava se

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

varijabla integracije

# 1.2 Neodređeni integral

- proces pronalaženja antiderivacije se naziva *integracija*

**Definicija 2:** Ako je  $F(x)$  primitivna funkcija (antiderivacija) funkcije  $f(x)$ , tada se skup svih primitivnih funkcija  $\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$  funkcije  $f(x)$  naziva *neodređeni integral* funkcije  $f(x)$ , i označava se

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

primitivna funkcija

# 1.2 Neodređeni integral

- proces pronalaženja antiderivacije se naziva *integracija*

**Definicija 2:** Ako je  $F(x)$  primitivna funkcija (antiderivacija) funkcije  $f(x)$ , tada se skup svih primitivnih funkcija  $\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$  funkcije  $f(x)$  naziva *neodređeni integral* funkcije  $f(x)$ , i označava se

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

konstanta integracije

# 1.2 Neodređeni integral

---

Računska svojstva:

1. Homogenost:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

2. Linearnost:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

# 1.2 Neodređeni integral

**Primjer 4:**

$$\mathbf{a)} \int (x - 1)dx = \int xdx - \int dx = \frac{x^2}{2} + c_1 - x + c_2$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + c$$

$$\mathbf{b)} \int 5e^x dx = 5 \int e^x dx = 5e^x + c$$

# 1.2 Neodređeni integral

---

Tablica integrala: radi lakšeg integriranja možete koristiti tablicu osnovnih integrala, slično kako smo imali i kod deriviranja.

**SAMI!!!**

# 1.2 Neodređeni integral

---

## Direktna integracija

- podintegralnu funkciju transformiramo tako da ju prikažemo uz pomoć elementarnih funkcija.
- primijenimo pravila integriranja i tablicu integrala da bismo izračunali traženu primitivnu funkciju
- Svaki rezultat možete jednostavno provjeriti! Derivirajte ga, derivacija integrala mora biti jednaka podintegralnoj funkciji.

# 1.2 Neodređeni integral

**Zadaci:**

$$1. \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$2. \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + c$$