

2. predavanje

# 1. NEODREĐENI INTEGRAL

12. ožujka, 2010.

Građevinski fakultet u Osijeku

mr.sc. Josipa Matotek, prof.

# 1.3 Metode integriranja

---

- Metoda supstitucije (zamjene)  
koristimo ju kad je podintegralna funkcija složena

# 1.3 Metode integriranja

---

- Metoda supstitucije (zamjene)  
koristimo ju kad je podintegralna funkcija složena
- Metoda parcijalne (djelomične) integracije  
koristimo ju kad je podintegralna funkcija umnožak  
dvije (ili više) cikličkih funkcija,  
npr.  $x \sin x$ ,  $x^2 \cos x$ ,  $e^x \cos x$

## 1.3.1 Metoda supstitucije

---

- ako primitivnu funkciju ne možemo izračunati direktno koristeći tablicu integrala i elementarne transformacije, uvest ćemo novu varijablu-supstituciju, tj. zamijenit ćemo staru

# 1.3.1 Metoda supstitucije

---

- ako primitivnu funkciju ne možemo izračunati direktno koristeći tablicu integrala i elementarne transformacije, uvest ćemo novu varijablu-supstituciju, tj. zamijenit ćemo staru
- nakon uvođenja nove varijable, podintegralna funkcija mora biti izražena uz pomoć te nove varijable koja je ujedino i varijabla integracije

## 1.3.1 Metoda supstitucije

---

- ako primitivnu funkciju ne možemo izračunati direktno koristeći tablicu integrala i elementarne transformacije, uvest ćemo novu varijablu-supstituciju, tj. zamijenit ćemo staru
- nakon uvođenja nove varijable, podintegralna funkcija mora biti izražena uz pomoć te nove varijable koja je ujedino i varijabla integracije
- nakon integriranja moramo ponovno vratiti staru, početnu varijablu.

# 1.3.1 Metoda supstitucije

**Formula za integraciju supstitucijom:**

$$\int f(g(x))dx = \left| \begin{array}{l} g(x) = t \Rightarrow x = g^{-1}(t) \\ dx = (g^{-1})'(t)dt \end{array} \right|$$
$$= \int f(t)(g^{-1})'(t)dt$$

- pretpostavlja se da funkcija  $g$  ima derivabilnu inverznu funkciju  $g^{-1}$  bar na nekom malom intervalu.

# 1.3.1 Metoda supstitucije

---

## 2. Formula za integraciju supstitucijom:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{array} \right| = \int f(g(t))g'(t)dt$$

- pretpostavlja se da funkcija  $g$  derivabilna bar na nekom malom intervalu.

# 1.3.1 Metoda supstitucije

---

**Primjeri:**

$$6. \int (2x + 5)^3 dx$$

# 1.3.1 Metoda supstitucije

---

**Primjeri:**

$$6. \int (2x + 5)^3 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x + 5 \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right|$$

# 1.3.1 Metoda supstitucije

**Primjeri:**

$$\begin{aligned} 6. \int (2x + 5)^3 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2x + 5 \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| \\ &= \int t^3 \cdot \frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

# 1.3.1 Metoda supstitucije

**Primjeri:**

$$\begin{aligned} 6. \int (2x + 5)^3 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2x + 5 \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| \\ &= \int t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{1}{8} (2x + 5)^4 + c \end{aligned}$$

# 1.3.1 Metoda supstitucije

**Primjeri:**

$$\begin{aligned} 6. \int (2x + 5)^3 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2x + 5 \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| \\ &= \int t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{1}{8} (2x + 5)^4 + c \end{aligned}$$

$$7. \int 5^{-3x+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = -3x + 1 \\ dt = -3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{-3} dt \end{array} \right|$$

# 1.3.1 Metoda supstitucije

**Primjeri:**

$$6. \int (2x + 5)^3 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x + 5 \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right|$$
$$= \int t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{1}{8} (2x + 5)^4 + c$$

$$7. \int 5^{-3x+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = -3x + 1 \\ dt = -3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{-3} dt \end{array} \right|$$
$$= \int 5^t \cdot \frac{1}{-3} dt$$

# 1.3.1 Metoda supstitucije

**Primjeri:**

$$\begin{aligned} 6. \int (2x + 5)^3 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2x + 5 \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| \\ &= \int t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{1}{8} (2x + 5)^4 + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \int 5^{-3x+1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = -3x + 1 \\ dt = -3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{-3} dt \end{array} \right| \\ &= \int 5^t \cdot \frac{1}{-3} dt = \frac{-1}{3} \cdot \frac{5^t}{\ln 5} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{5^{-3x+1}}{\ln 5} + c \end{aligned}$$

# 1.3.1 Metoda supstitucije

- Integrale oblika

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \text{ i } \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

rješavamo tako da kvadratnu funkciju nadopunimo do potpunog kvadrata prema formuli:

$$x^2 \pm px \pm q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} \pm q$$

a zatim koristimo supstituciju

$$t = x \pm \frac{p}{2}$$

## 1.3.1 Metoda supstitucije

---

**Primjer 8:** 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2}$$

# 1.3.1 Metoda supstitucije

**Primjer 8:** 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2}$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right|$$

## 1.3.1 Metoda supstitucije

**Primjer 8:** 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2}$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 2}$$

## 1.3.1 Metoda supstitucije

**Primjer 8:** 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2}$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + c$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + c$$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

---

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

- zapišimo formulu u kraćem obliku

## 1.3.2 Parcijalna integracija

---

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

- zapišimo formulu u kraćem obliku
- neka je  $u = f(x)$  i  $v = g(x)$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

---

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

- zapišimo formulu u kraćem obliku
- neka je  $u = f(x)$  i  $v = g(x)$
- iz čega slijedi  $du = f'(x)dx$  i  $dv = g'(x)dx$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

- zapišimo formulu u kraćem obliku
- neka je  $u = f(x)$  i  $v = g(x)$
- iz čega slijedi  $du = f'(x)dx$  i  $dv = g'(x)dx$

$$\boxed{\int u dv = u \cdot v - \int v du}$$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

---

- upotreba formule je moguća samo ako je moguće izračunati funkciju  $v$ 
  - kod određivanja funkcije  $v = \int dv$  nije potrebno dodavati konstantu  $c$ , tek ju dodajemo na kraju zadatka!

## 1.3.2 Parcijalna integracija

- upotreba formule je moguća samo ako je moguće izračunati funkciju  $v$ 
  - kod određivanja funkcije  $v = \int dv$  nije potrebno dodavati konstantu  $c$ , tek ju dodajemo na kraju zadatka!
- *uočite*: ova metoda ne rješava integral potpuno, nego ga svodi na novi integral
  - formula je korisna samo kada je integral na desnoj strani jednostavniji od integrala na lijevoj strani

## 1.3.2 Parcijalna integracija

---

**Izvod formule:**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

---

**Izvod formule:**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

**Izvod formule:**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int g(x) \cdot f'(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

**Izvod formule:**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int g(x) \cdot f'(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

---

- Kako odrediti  $u$  i  $dv$ ?

**Primjer 9:**

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

- Kako odrediti  $u$  i  $dv$ ?

**Primjer 9:**

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$
$$= e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx \text{ NIJE DOBAR IZBOR}$$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

- Kako odrediti  $u$  i  $dv$ ?

**Primjer 9:**

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

$$= e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx \text{ NIJE DOBAR IZBOR}$$

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right|$$

## 1.3.2 Parcijalna integracija

- Kako odrediti  $u$  i  $dv$ ?

**Primjer 9:**

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

$$= e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx \text{ NIJE DOBAR IZBOR}$$

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right|$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$