ODREĐENI INTEGRAL

1. Problem površine
2. Integralna suma

- Definicija određenog integrala
- Newton-Leibnitz-ova formula
- Supstitucija kod određenog integrala
- Svojstva određenog integrala
- Teorem srednje vrijednosti određenog integrala

Problem površine-povijest

- problem računanja površine ravninskih likova star je više od 4000 godina

Problem površine-povijest

- problem računanja površine ravninskih likova star je više od 4000 godina
  - **stari Egipćani (2000-1800 g.p.n.e.)**
    - poznavali su pravila za računanje površine i volumena jednostavnijih objekata

Problem površine-povijest

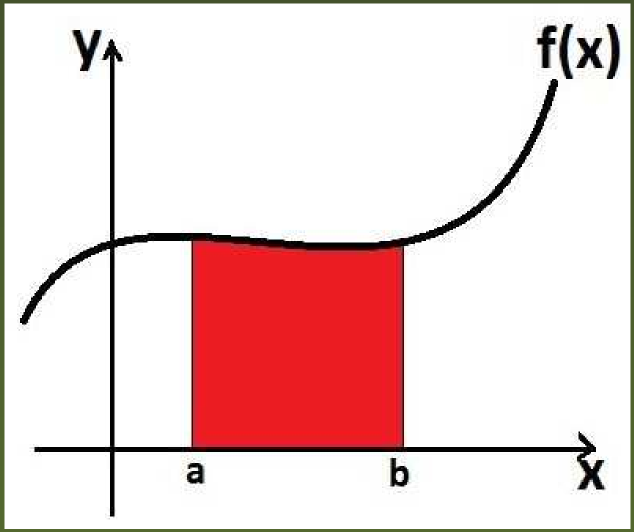
- problem računanja površine ravninskih likova star je više od 4000 godina
  - **stari Egipćani (2000-1800 g.p.n.e.)**
    - poznavali su pravila za računanje površine i volumena jednostavnijih objekata
  - **stari Grci s Talesom**(585 g.p.n.e.)
    - sistematično izvode formule za volumen kocke,
    - Arhimed (250 g.p.n.e) u dokazima koristi metodu ekshaustije ("iscrpljivanja"):
    ideja je prekriti lik nizom pravokutnika ili u lik upisati pravokutnike, tada površinu promatranog lika aproksimira zbrojem površina pravokutnika

Problem površine

- *problem*: izračunati površinu pseudotrapeza (krivuljni trapez)!
  preciznije: odrediti površinu skupa P, gdje je

$$P = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

  f je neprekidna na $I = [a, b]$ i f je nenegativna na I.



Problem površine-subdivizija

Podijelimo segment I na n podintervala.
Konačan skup točaka $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ za koje vrijedi:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

nazivamo **subdivizija** ili **particija** segmenta I.

Problem površine-subdivizija

Podijelimo segment I na n podintervala.
Konačan skup točaka $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ za koje vrijedi:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

nazivamo **subdivizija** ili **particija** segmenta I.
duljina podintervala:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \forall i = 1, ..., n$$

Problem površine-subdivizija

Podijelimo segment I na n podintervala.
Konačan skup točaka $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ za koje vrijedi:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

nazivamo **subdivizija** ili **particija** segmenta I.
duljina podintervala:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \forall i = 1, ..., n$$

Ako je $\Delta x_i = h = \dfrac{b-a}{n},\ \forall i = 1, ..., n$ sudivizija je **ekvidistantna**.

Problem površine

problem: aproksimirat ćemo površinu pseudotrapeza P,

- odredimo jednu subdiviziju segmenta I kako smo opisali

Problem površine

problem: aproksimirat ćemo površinu pseudotrapeza P,

- odredimo jednu subdiviziju segmenta I kako smo opisali
- pravcima $x = x_i,\ \forall i = 1, ..., n,\ n \in \mathbb{N}$ podijelimo pseudotrapez P na manje pseudotrapeze P_i

Problem površine

problem: aproksimirat ćemo površinu pseudotrapeza P,

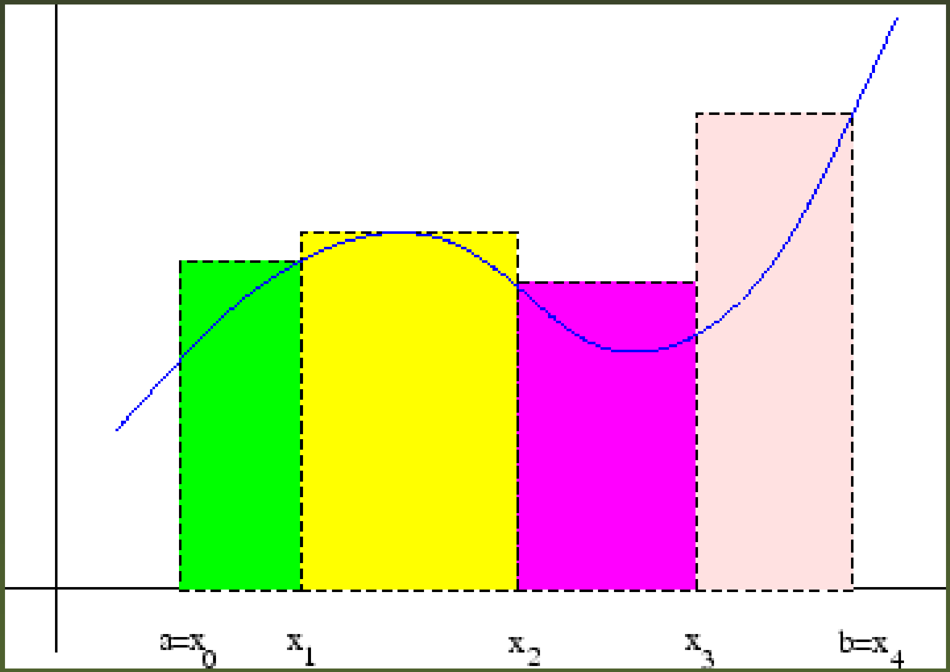
- odredimo jednu subdiviziju segmenta I kako smo opisali
- pravcima $x = x_i,\ \forall i = 1, ..., n,\ n \in \mathbb{N}$ podijelimo pseudotrapez P na manje pseudotrapeze P_i
- jer je funkcija f omeđena na I, omeđena je i na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i] \Rightarrow$ postoje

$$m_i = min\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i],\ \forall i = 1, ..., n\}$$

$$M_i = max\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i],\ \forall i = 1, ..., n\}$$

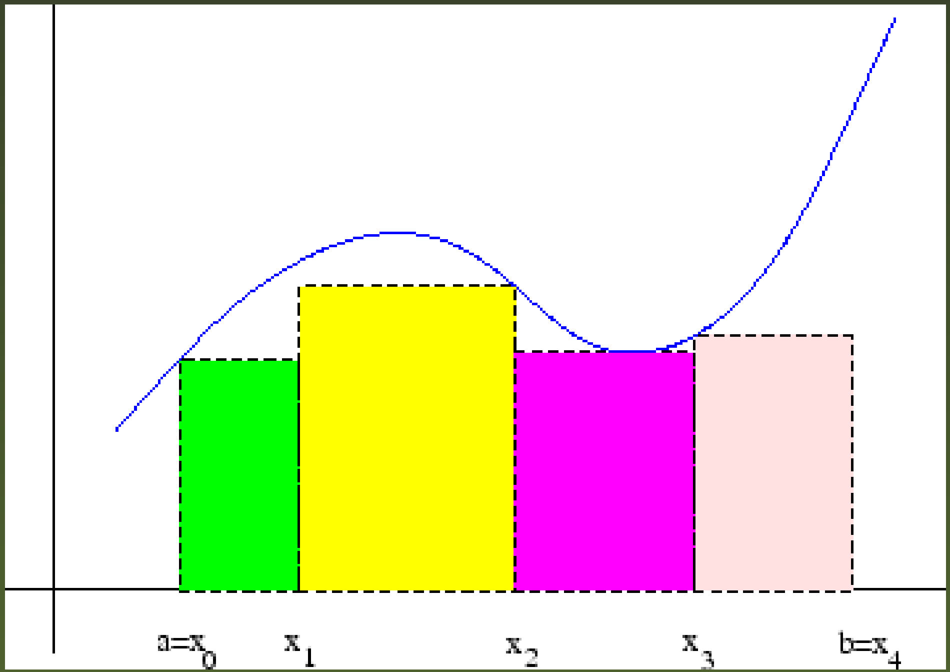
Problem površine

- opisat ćemo pravokutnike S_i svakom pseudotrapezu P_i, tako da duljina baze pravokutnika S_i iznosi Δx_i, a visina M_i



Problem površine

- upisat ćemo pravokutnike s_i svakom pseudotrapezu P_i, tako da duljina baze pravokutnika s_i iznosi Δx_i, a visina m_i



Problem površine

- izračunajmo površinu svih opisanih pravokutnika:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

Problem površine

- izračunajmo površinu svih opisanih pravokutnika:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

- izračunajmo površinu svih upisanih pravokutnika:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

Problem površine

- izračunajmo površinu svih opisanih pravokutnika:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

- izračunajmo površinu svih upisanih pravokutnika:

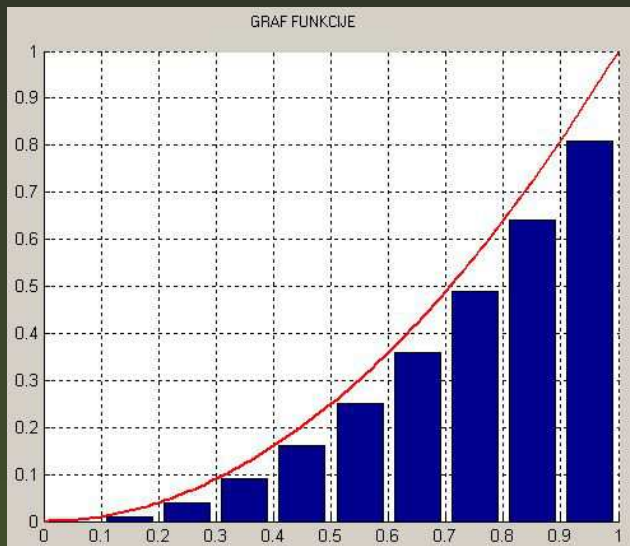
$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

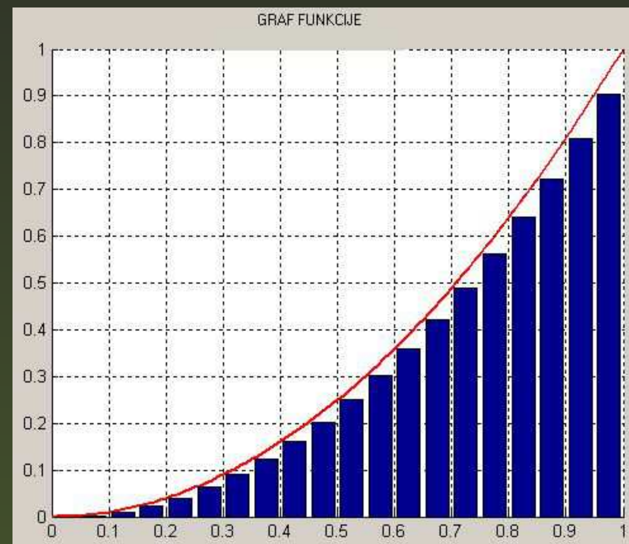
Uočimo:

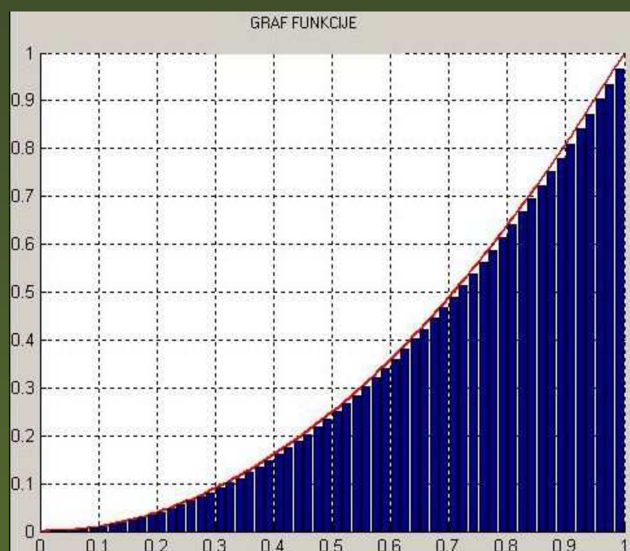
$$s \leq P \leq S$$

Što je n veći to je aproksimacija točnija!

Problem površine







Problem površine

- **Primjer 1:** Izračunajte površine S i s za dane funkcije:

  a) $f(x) = 2x$, gdje je $x \in [0,1]$ uz zadanu subdiviziju $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$.

  b) $f(x) = 1 - x^2$, gdje je $x \in [0,1]$ uz zadanu subdiviziju $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$.

  Da li je subdivizija $\mathcal{P}$ ekvidistantna?

ntegralna suma

- neka je nadalje $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, ..., n$ tj.

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

ntegralna suma

- neka je nadalje $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, ..., n$ tj.
$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$
- tada vrijedi $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, $\forall i = 1, ..., n$

ntegralna suma

- neka je nadalje $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, ..., n$ tj.
$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$
- tada vrijedi $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, $\forall i = 1, ..., n$
- definirajmo novu sumu

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

ntegralna suma

- neka je nadalje $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, ..., n$ tj.

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

- tada vrijedi $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, $\forall i = 1, ..., n$
- definirajmo novu sumu

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

- uočimo da vrijedi

$$s \leq S_0 \leq S$$

ntegralna suma

- neka je nadalje $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, \ldots, n$ tj.

$$x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

- tada vrijedi $m_i \le f(c_i) \le M_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$
- definirajmo novu sumu

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

- uočimo da vrijedi

$$s \le S_0 \le S$$

donja integralna suma

ntegralna suma

- neka je nadalje $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, \ldots, n$ tj.

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

- tada vrijedi $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$
- definirajmo novu sumu

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

- uočimo da vrijedi

$$s \leq S_0 \leq S$$

integralna suma

ntegralna suma

- neka je nadalje $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, \dots, n$ tj.

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

- tada vrijedi $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, $\forall i = 1, \dots, n$
- definirajmo novu sumu

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

- uočimo da vrijedi

$$s \leq S_0 \leq S$$

gornja integralna suma

Određeni integral-definicija

neka je f neprekidna na $[a, b]$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} n f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

a- donja granica
b- gornja granica

$$\boxed{\text{Limes integralne sume je jednak određenom (RIEMMANOV-om) integralu}}$$

Važno: vrijednost određenog integrala ne ovisi o subdiviziji $\mathcal{P}$, niti o izboru broja c_i!

Određeni integral-definicija

- **Primjer 2:** Izračunajte integralnu sumu za funkciju $f(x) = x + 1$ na intervalu $[a, b]$, zatim izračunajte limes te integralne sume, tj. određeni integral.

Određeni integral-definicija

- **Primjer 2:** Izračunajte integralnu sumu za funkciju $f(x) = x + 1$ na intervalu $[a, b]$, zatim izračunajte limes te integralne sume, tj. određeni integral.
- **Primjer 3:** Izračunajte površinu ispod krivulje $f(x) = x^2$ na segmentu $[a, b]$ uz pomoć integralne sume.

Newton-Leibnitz-ova formula

Postoji veza između neodređenog i određenog integrala.

Newton-Leibnitz-ov teorem: Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna na I. Neka je $F : I \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$. Tada vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b)$$

Primjer 4:

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

Određeni integral-supstitucija

- u zadacima u kojima se koristi supstitucija se mijenjaju granice integrala!
- **Primjer 5:**

$$\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \\ t_1 = 0+1 = 1 \\ t_2 = 3+1 = 4 \end{bmatrix} = \int_1^4 \sqrt{t}\,dt = \left.\frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{\frac{-1}{2}}\right|_1^4$$

$$= \left.\frac{-2}{\sqrt{t}}\right|_1^4 = \frac{-2}{\sqrt{4}} - \frac{-2}{\sqrt{1}} = \frac{-2}{2} + 2 = -1 + 2 = 1$$

Određeni integral-supstitucija

Supstitucija kod parcijalnog integriranja

- u zadacima u kojima se koristi parcijalna integracija, granice integrala ostaju iste!
- **Primjer 6:**

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{bmatrix}$$

$$= x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 0$$

Svojstva određenog integrala

- Ako su obje granice jednake integral je jednak 0

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Svojstva određenog integrala

- Ako su obje granice jednake integral je jednak 0

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- Ako granice zamijene mjesta, integral mijenja predznak

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,\ a < b$$

Svojstva određenog integrala

- Ako je $c \in [a, b]$, vrijedi aditivnost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Svojstva određenog integrala

- Ako je $c \in [a, b]$, vrijedi aditivnost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Homogenost:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Svojstva određenog integrala

- Ako je $c \in [a, b]$, vrijedi aditivnost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Homogenost:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

- Linearnost:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Teorem srednje vrijednosti

Teorem: Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada postoji točka $c \in [a, b]$ takva da vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

- za neprekidnu funkciju f moguće je pronaći takav $c \in [a, b]$ da je površina pseudotrapeza ispod krivulje jednaka površini pravokutnika baze $b-a$ i visine $f(c)$!