

# NEODREĐENI INTEGRAL

## Tehnike integriranja

1. Integriranje racionalne funkcije
2. Integriranje nekih iracionalnih funkcija
3. Integriranje trigonometrijskih funkcija

# Integriranje racionalne funkcije

---

■ PONOVIAMO:

# Integriranje racionalne funkcije

## ■ PONOVI MO:

- Racionalna funkcija je kvocijent dvaju polinoma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

# Integriranje racionalne funkcije

## ■ PONOVI MO:

- Racionalna funkcija je kvocijent dvaju polinoma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

- Prava racionalna funkcija je ona kod koje je stupanj polinoma u brojniku strogo manji od stupnja polinoma u nazivniku

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \quad n < m \text{ i } n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}$$

# Integriranje racionalne funkcije

Opis postupka:

- svođenje racionalne funkcije na pravu racionalnu funkciju:

# Integriranje racionalne funkcije

## Opis postupka:

- svođenje racionalne funkcije na pravu racionalnu funkciju:
- pronaći nultočke nazivnika racionalne funkcije,

# Integriranje racionalne funkcije

## Opis postupka:

- svođenje racionalne funkcije na pravu racionalnu funkciju:
- pronaći nultočke nazivnika racionalne funkcije,
- rastaviti dobivenu funkciju na parcijalne razlomke,

# Integriranje racionalne funkcije

## Opis postupka:

- svođenje racionalne funkcije na pravu racionalnu funkciju:
- pronaći nultočke nazivnika racionalne funkcije,
- rastaviti dobivenu funkciju na parcijalne razlomke,
- integriranje parcijalnih razlomaka,

# Integriranje racionalne funkcije

Svođenje na pravu racionalnu funkciju:

- eliminacija zajedničkih nultočki

# Integriranje racionalne funkcije

Svođenje na pravu racionalnu funkciju:

- eliminacija zajedničkih nultočki
- dijeljenje brojnika s nazivnikom

# Integriranje racionalne funkcije

Svođenje na pravu racionalnu funkciju:

- eliminacija zajedničkih nultočki
- dijeljenje brojnika s nazivnikom

- $$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

# Integriranje racionalne funkcije

Svođenje na pravu racionalnu funkciju:

- eliminacija zajedničkih nultočki
- dijeljenje brojnika s nazivnikom

- $$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

- $s(x)$ - rezultat dijeljenja

# Integriranje racionalne funkcije

Svođenje na pravu racionalnu funkciju:

- eliminacija zajedničkih nultočki
- dijeljenje brojnika s nazivnikom

- $$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

- $s(x)$ - rezultat dijeljenja
- $r(x)$ -ostatak kod dijeljenja

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 10:** Izračunajte  $\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 10:** Izračunajte  $\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$

Zadana funkcija nije prava!

Svedimo ju dijeljenjem na pravu:

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 10:** Izračunajte  $\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$

Zadana funkcija nije prava!

Svedimo ju dijeljenjem na pravu:

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 10:** Izračunajte  $\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$

Zadana funkcija nije prava!

Svedimo ju dijeljenjem na pravu:

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = \int x dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 10:** Izračunajte  $\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$

Zadana funkcija nije prava!

Svedimo ju dijeljenjem na pravu:

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = \int x dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right|$$

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 10:** Izračunajte  $\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$

Zadana funkcija nije prava!

Svedimo ju dijeljenjem na pravu:

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} &= \int x dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| \\ &= \frac{x^2}{2} + \int \frac{dt}{t} = \end{aligned}$$

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 10:** Izračunajte  $\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$

Zadana funkcija nije prava!

Svedimo ju dijeljenjem na pravu:

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} &= \int x dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| \\ &= \frac{x^2}{2} + \int \frac{dt}{t} = \frac{x^2}{2} + \ln |t| + c = \frac{x^2}{2} + \ln |x^2 - 1| + c \end{aligned}$$

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 11:** Rastavite funkciju

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{(x^4 + x^2)(x^2 - x - 6)(x + 2)}$$

na parcijalne ralomke ne računajući koeficijente.

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 11:** Rastavite funkciju

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{(x^4 + x^2)(x^2 - x - 6)(x + 2)}$$

na parcijalne ralomke ne računajući koeficijente.

Rješenje:

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 2} + \frac{C_1}{(x + 2)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$$

# Integriranje racionalne funkcije

Integriranje parcijalnih razlomaka najčešće nije teško.

Dva kompliciranija tipa:

- $\frac{A}{(ax + b)^n}, \quad a \neq 0 \text{ i } n \in \mathbb{N}, \quad A, a, b \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{A}{(ax + b)^n} dx = \left| \begin{array}{l} t = ax + b \\ dt = a dx \end{array} \right| = \frac{A}{a} \int \frac{dt}{t^n} = \dots$$

- $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}, \quad b^2 - 4ac < 0 \text{ i } A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$

mi ćemo rješavati slučaj samo kad je  $n = 1$   
svođenjem na potpuni kvadrat

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 8:** 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2}$$

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 8:** 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2}$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right|$$

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 8:** 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2}$$
$$= \left| \begin{array}{l} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 2}$$

# Integriranje racionalne funkcije

**Primjer 8:** 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2}$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + c$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + c$$

# Integriranje racionalne funkcije

## Primjer 10:

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = \int x dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

Riješimo  $\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$  tako da rastavimo pravu racionalnu funkciju na parcijalne razlomke

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

metodom neodređenih koef.  $A = 1$  i  $B = 1$  pa slijedi

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{dx}{x - 1} = \ln |x + 1| + \ln |x - 1| + c$$

## Integriranje nekih iracionalnih funkcija

Integral oblika:

$$\int R \left[ x, \left( \frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left( \frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots \right] dx,$$

gdje je  $R$  racionalna funkcija,  $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots \in \mathbb{Z}$   
rješavamo supstitucijom

$$\frac{ax + b}{cx + d} = t^n,$$

pri čemu je  $n$  najmanji zajednički višekratnik brojeva  
 $q_1, q_2, \dots$

## Primjer 12:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+3}} dx = \left[ \begin{array}{l} 2x + 3 = t^3 \Rightarrow x = \frac{t^3-3}{2} \\ 2dx = 3t^2 dt \end{array} \right]$$

## Integriranje nekih iracionalnih funkcija

### Primjer 12:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+3}} dx = \left[ \begin{array}{l} 2x + 3 = t^3 \Rightarrow x = \frac{t^3-3}{2} \\ 2dx = 3t^2 dt \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^3-3}{2}}{\sqrt[3]{t^3}} \cdot \frac{3}{2} t^2 dt = \frac{3}{4} \int (t^4 - 3t) dt$$

## Integriranje nekih iracionalnih funkcija

### Primjer 12:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+3}} dx = \left[ \begin{array}{l} 2x + 3 = t^3 \Rightarrow x = \frac{t^3-3}{2} \\ 2dx = 3t^2 dt \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^3-3}{2}}{\sqrt[3]{t^3}} \cdot \frac{3}{2} t^2 dt = \frac{3}{4} \int (t^4 - 3t) dt$$

$$= \frac{3}{4} \frac{t^5}{5} - \frac{9}{4} \frac{t^2}{2} + c$$

## Integriranje nekih iracionalnih funkcija

### Primjer 12:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+3}} dx = \left[ \begin{array}{l} 2x + 3 = t^3 \Rightarrow x = \frac{t^3-3}{2} \\ 2dx = 3t^2 dt \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^3-3}{2}}{\sqrt[3]{t^3}} \cdot \frac{3}{2} t^2 dt = \frac{3}{4} \int (t^4 - 3t) dt$$

$$= \frac{3}{4} \frac{t^5}{5} - \frac{9}{4} \frac{t^2}{2} + c$$

$$= \frac{3}{20} \sqrt[3]{(2x+3)^5} - \frac{9}{8} \sqrt[3]{(2x+3)^2} + c$$

## Integriranje trigonometrijskih funkcija-1.tip

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx, \quad \text{gdje su } m, n \in \mathbb{N}$$

a) ako je  $m = 2k + 1$  neparan broj, onda gornji integral rješavamo supstitucijom  $t = \cos x$ :

$$\int \sin^{2k} x \cdot \sin x \cdot \cos^n x dx = \left[ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right]$$
$$= - \int (1 - t^2)^k \cdot t^n dt$$

## Integriranje trigonometrijskih funkcija-1.tip

b) ako su  $m = 2k$  i  $n = 2l$  parni pozitivni brojevi, onda integral svodimo na 1. tip uz pomoć trigonometrijskih formula:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

### Primjer 13:

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x dx$$

### Primjer 13:

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = - \int (1 - t^2)t^5 dt$$

### Primjer 13:

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = - \int (1 - t^2) t^5 dt$$

$$= -\frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{8} + c$$

## Integriranje nekih iracionalnih funkcija-1.tip

### Primjer 13:

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = - \int (1 - t^2) t^5 dt$$

$$= -\frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{8} + c$$

$$= -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + c$$

## Integriranje trigonometrijskih funkcija-2.tip

$$\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx, \quad \int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx,$$

$$\text{ i } \int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx, \text{ gdje su } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

takve integrale rješavamo uz pomoć trig. formula:

$$\sin(\alpha x) \sin(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\sin(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x]$$

$$\cos(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x]$$

### Primjer 14:

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int [\sin(2 - 3)x + \sin(2 + 3)x] dx$$

### Primjer 14:

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(2 - 3)x + \sin(2 + 3)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int (-\sin x + \sin 5x) dx\end{aligned}$$

### Primjer 14:

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(2 - 3)x + \sin(2 + 3)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int (-\sin x + \sin 5x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c\end{aligned}$$

## Integriranje trigonometrijskih funkcija-3.tip

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

gdje je  $R$  racionalna funkcija svojih argumenata

- supstitucijom  $t = \tan \frac{x}{2}$  svodimo na integral racionalne funkcije
- iz supstitucije se lako mogu izvesti sljedeće formule:

$$x = 2 \arctan t,$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

### Primjer 15:

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3}$$

## Primjer 15:

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3}$$
$$= 2 \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}$$

## Integriranje trigonometrijskih funkcija-3.tip

### Primjer 15:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} \\ &= 2 \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}} \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}\end{aligned}$$

## Integriranje trigonometrijskih funkcija-3.tip

### Primjer 15:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} \\ &= 2 \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}} \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} \\ &= \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1} = \arctan \left( 1 + \tan \frac{x}{2} \right) + c\end{aligned}$$