

3 SLOBODNE NEPRIGUŠENE VIBRACIJE

- nema uzbudne sile
- vibracije nastaju uslijed početnog pomaka i/ili početne brzine.

3.1 JEDNOSTAVNO HARMONIJSKO GIBANJE

Jednadžba gibanja

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Rješenje jednadžbe gibanja

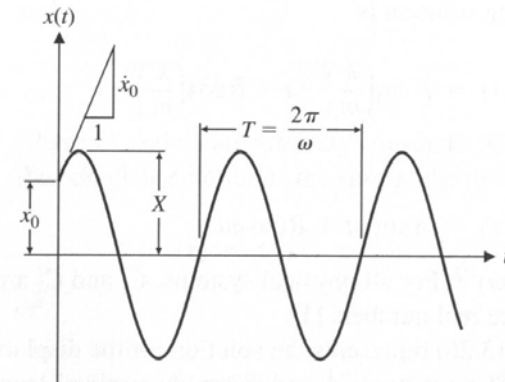
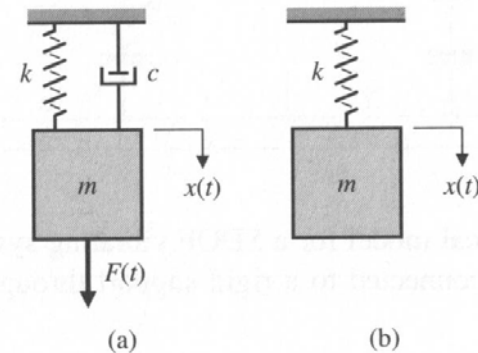
$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Početni uvjeti za $t=0$

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t$$

Period vibracija

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



3.2 INTERPRETACIJA RJEŠENJA

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{amplituda } X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$$

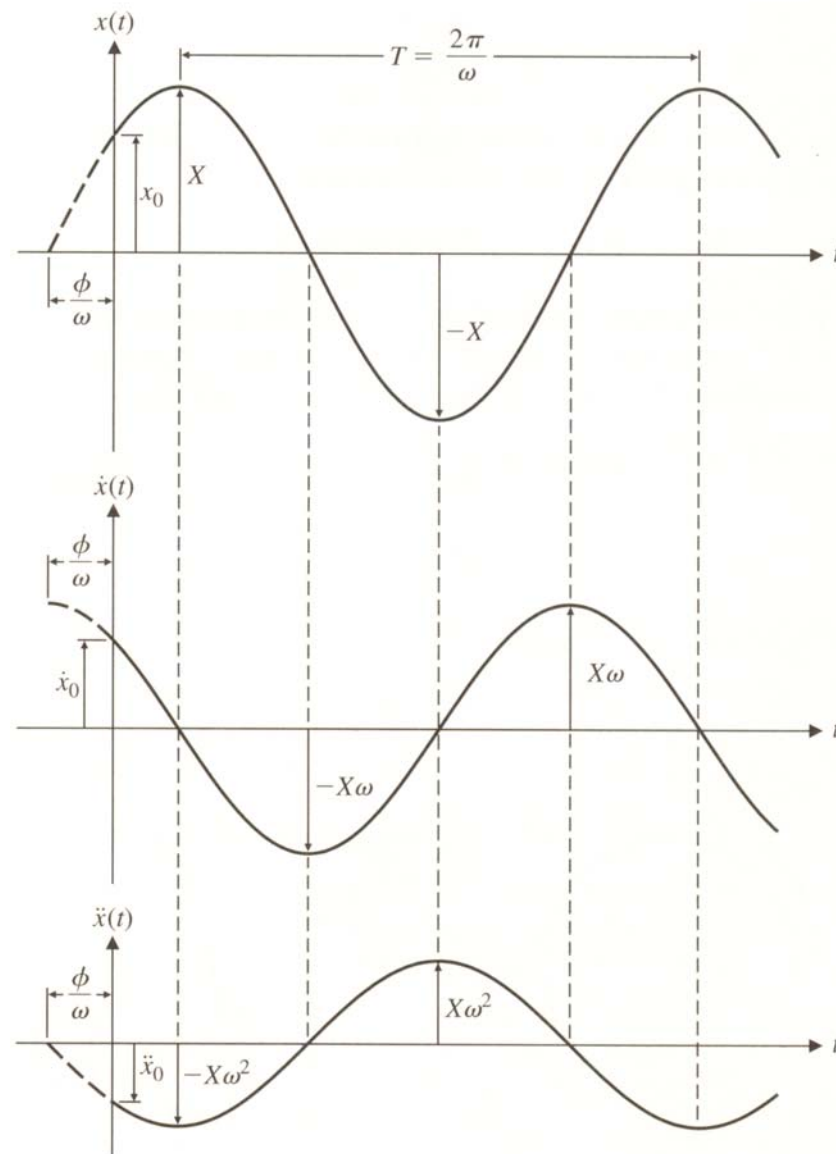
$$\text{fazni pomak } \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0}\right)$$

$$\text{brzina } \dot{x}(t) = X\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{ubrzanje } \ddot{x}(t) = -X\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Prirodna (vlastita) frekvencija

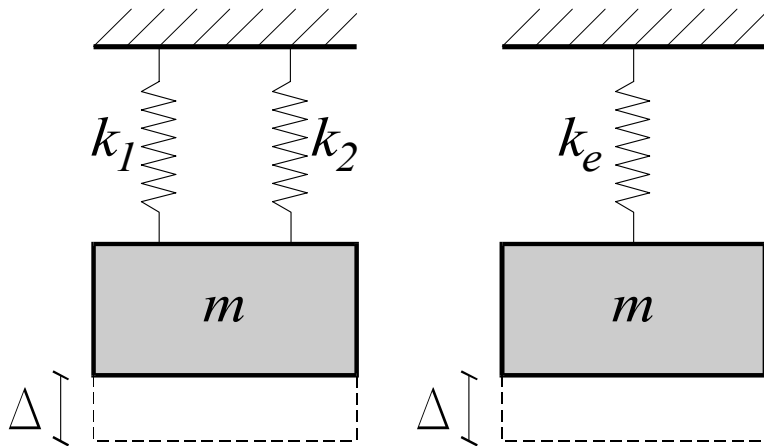
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad [\text{Hz}]$$



3.3 EKVIVALENTNA (ZAMJENJUJUĆA) KRUTOST

SDOF = jedna masa + jedna opruga

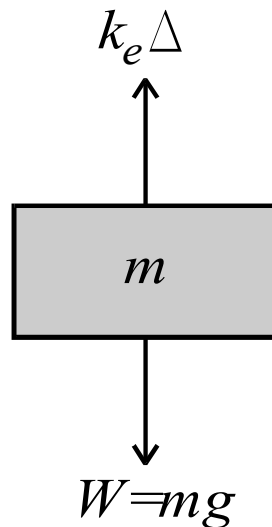
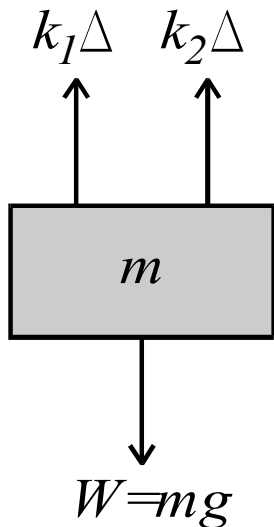
Zamjenjujuća opruga = ekvivalentni opis elastične krutosti konstrukcije



a) Paralelni spoj opruga

$$k_e \Delta = (k_1 + k_2) \Delta$$

$$k_e = k_1 + k_2$$



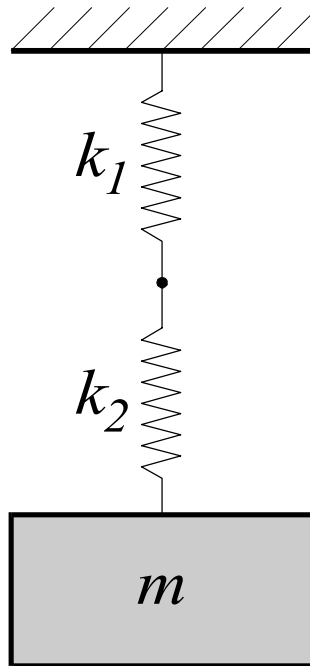
$$k_e = \sum_{i=1}^n k_i$$

3.3 EKVIVALENTNA (ZAMJENJUJUĆA) KRUTOST

SDOF = jedna masa + jedna opruga

Zamjenjujuća opruga = ekvivalentni opis elastične krutosti konstrukcije

a) Serijski spoj opruga



$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

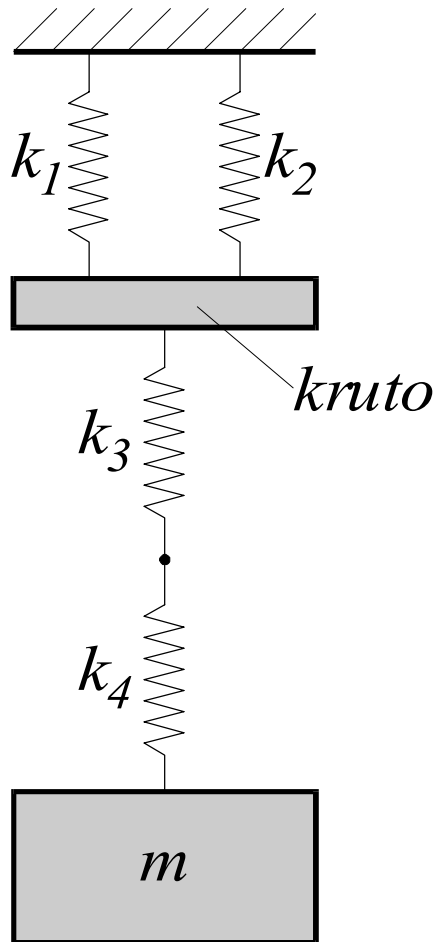
$$\frac{W}{k_e} = \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2}$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$k_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}$$

3.3 EKVIVALENTNA (ZAMJENJUJUĆA) KRUTOST

Primjer kombinacije paralelnog i serijskog spoja opruga



$$k_e = (k_e)_p + (k_e)_s$$

$$k_e = \frac{1}{\left[\frac{1}{(k_e)_p} \right] + \left[\frac{1}{(k_e)_s} \right]}$$

$$(k_e)_p = k_1 + k_2$$

$$(k_e)_s = \frac{1}{\left[\frac{1}{k_3} \right] + \left[\frac{1}{k_4} \right]}$$

$$k_e = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_1 + k_2} \right) + \left(\frac{1}{k_3} \right) + \left(\frac{1}{k_4} \right)}$$

3.4 RAYLEIGH-eva METODA

Konzervativni sustavi (bez prigušenja)

⇒ PRINCIP OČUVANJA ENERGIJE

Kinetička energija **T** (pohranjena u masi i proporcionalna kvadratu brzine)

Potencijalna energija **V** (deformacijska energija pohranjena u opruzi i proporcionalna njenoj elastičnoj deformaciji)

T + V = (ukupna mehanička energija) = *const.*

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

⇒ jednačba gibanja konzervativnog sustava (2.3)

⇒ vlastita kružna frekvencija ω

3.4 RAYLEIGH-eva METODA

Za proizvoljno odabrana dva bliska vremenska trenutka vrijedi:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = \text{const.}$$

1. trenutak : masa u položaju statičke ravnoteže (nema elastične deformacije ili energije deformacije u opruzi)

$$\Rightarrow V_1 = 0$$

2. trenutak : maksimalno produljenje opruge (brzina mase jednaka je nuli)

$$\Rightarrow T_2 = 0$$

$$T_1 + 0 = V_2 + 0$$

$$T_{\max} = V_{\max} \Rightarrow \text{vlastita kružna frekvencija } \omega$$