

5. ODZIV NA HARMONIJSKU UZBUDU

Deterministička dinamička opterećenja mogu biti:

- a) Periodička** (ponovljiva s višeciklusnom promjenom jedne amplitude)
 - harmonijska
 - neharmonijska
- b) Neperiodička**
 - kratkotrajna impulsna djelovanja (udari, eksplozije)
 - dugotrajna (podrhtavanje tla usljed potresa).

Harmonijska opterećenja najčešća su u industrijskim i energetskekim postrojenjima i uzrokuju harmonijske oscilacije dogod su strojevi u pogonu. Ove se vibracije sastoje od dvije komponente:

- **prolazna komponenta – “transient”** (usljed početnih uvjeta s frekvencijom jednakom vlastitoj frekvenciji konstruktivnog sustava, brzo se prigušuju te se stoga često zanemaruju)
- **stalna komponenta – “steady-state”** (pojavljuje se pri frekvenciji uzbudne sile te može dovesti do **rezonancije** ako se izjednači s vlastitom frekvencijom konstrukcije (može doći do velikih amplituda pomaka i rezultirati preopterećenjem i slomom sustava).

5.1 PRISILNI HARMONIJSKI ODZIV NEPRIGUŠENOG SUSTAVA

Harmonijske oscilacije javljaju se kod različitih konstruktivnih i mehaničkih sustava usljed djelovanja:

- alternirajućih i rotirajućih strojeva, motora i kompresora
- turbina
- radarskih uređaja.

Oblik harmonijske sile uzbude :

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t$$

F_0 - amplituda sile

Jednadžba gibanja :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

Ω - kružna frekvencija uzbudne sile

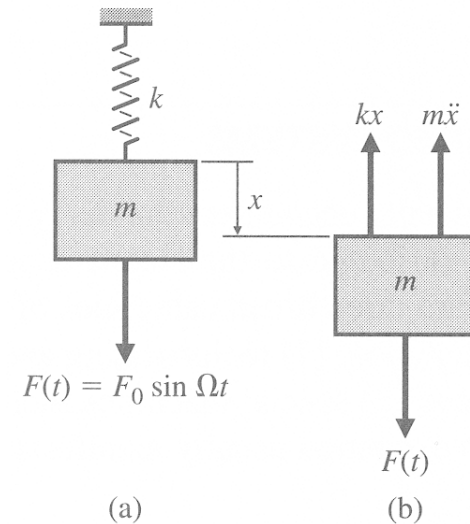
Rješenje :

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{F_0/k}{1 - (\Omega/\omega)^2} \sin \Omega t$$

$X_0 = F_0/k$ - ekvivalentni statički progib

$r = \Omega / \omega$ - omjer frekvencija

$\mu_{din} = 1/(1 - r^2)$ - dinamički koeficijent uvećanja



$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0/k}{1 - (\Omega/\omega)^2} \sin \Omega t$$

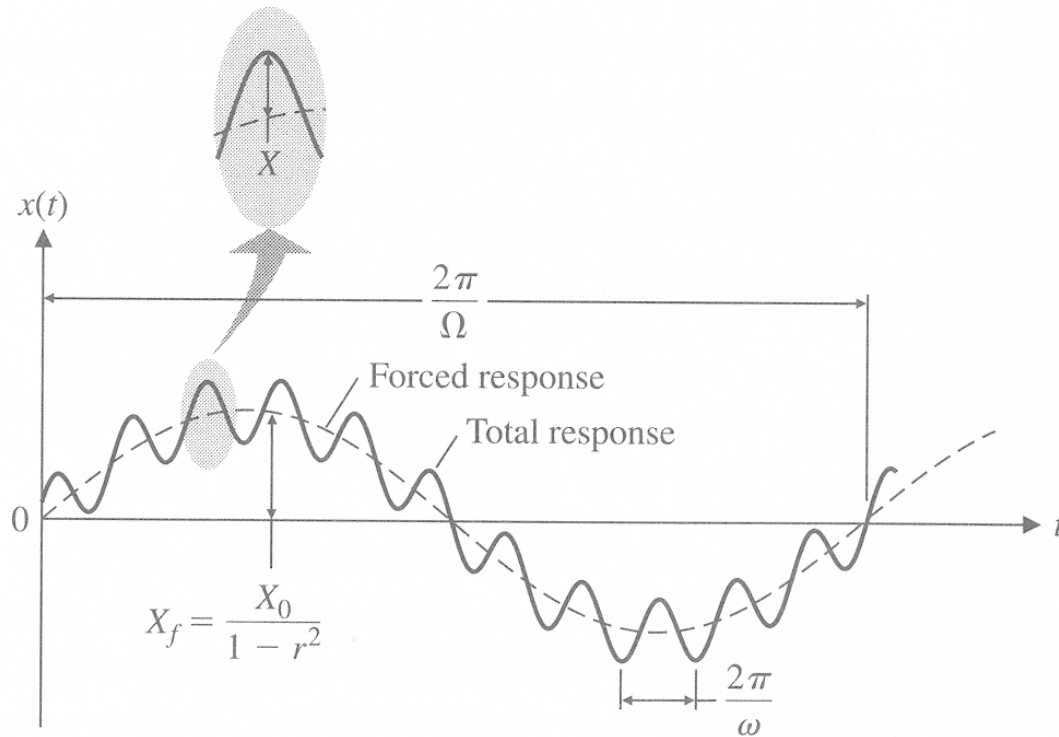
$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) + \frac{X_0}{1 - r^2} \sin \Omega t$$

prolazni dio
(transient)

trajni dio odziva
(steady state)

Moguće su tri vrste odziva :

- $r < 1 \Rightarrow \Omega < \omega$: prirodna frekvencija prolaznog odziva je veća od frekvencije trajnog odziva (vidi sliku);
- **$r = 1$!**
- $r > 1 \Rightarrow \Omega > \omega$



Slika odziva neprigušenog sustava s jednim stupnjem slobode na harmonijsku uzбудu

5.2 PULZIRANJE I REZONANCIJA

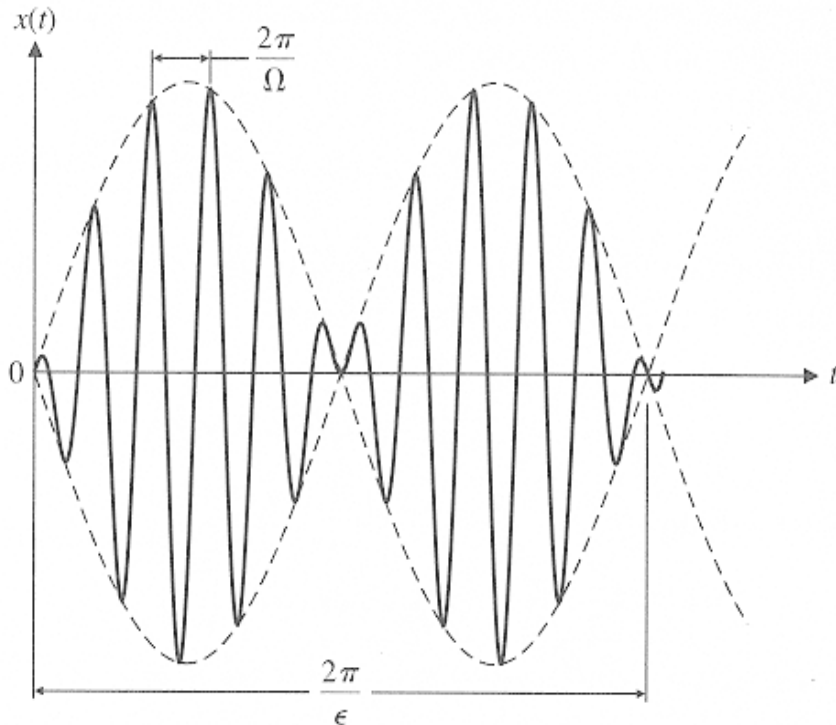
PULZIRANJE

$$r \Rightarrow 1 : \Omega \Rightarrow \omega$$

za početno stanje mirovanja :

$$x(t) = -\frac{X_0 \Omega}{2\varepsilon} \cos \Omega t \sin \varepsilon t$$

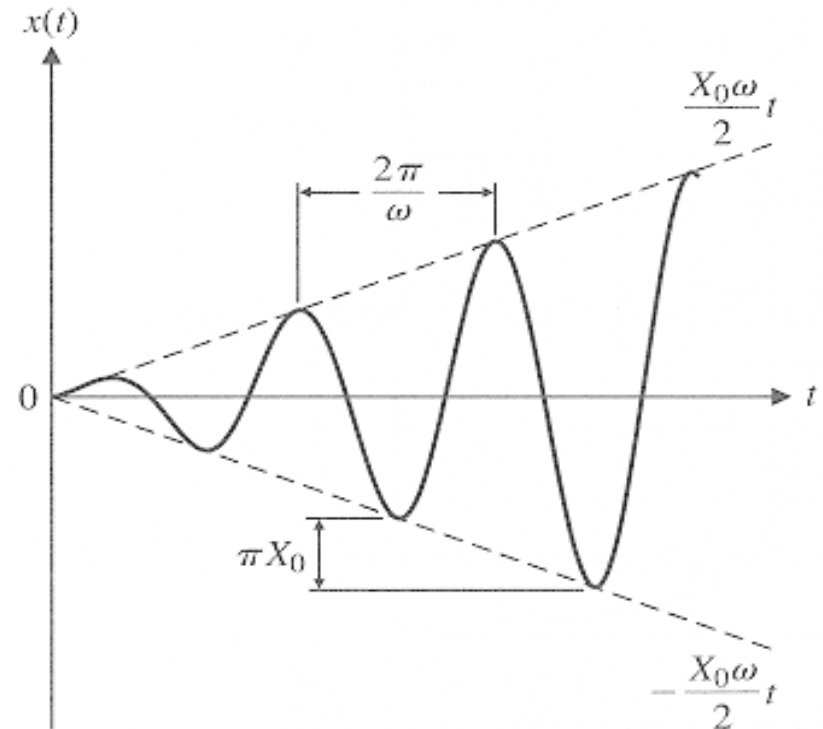
gdje je $\varepsilon = \frac{\omega - \Omega}{2}$



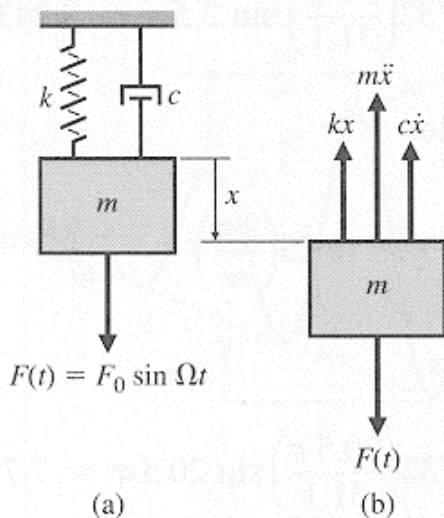
REZONANCIJA

$$r = 1 : \Omega = \omega, \mu \Rightarrow \infty$$

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) + \frac{X_0 \omega}{2} t \sin \omega t$$



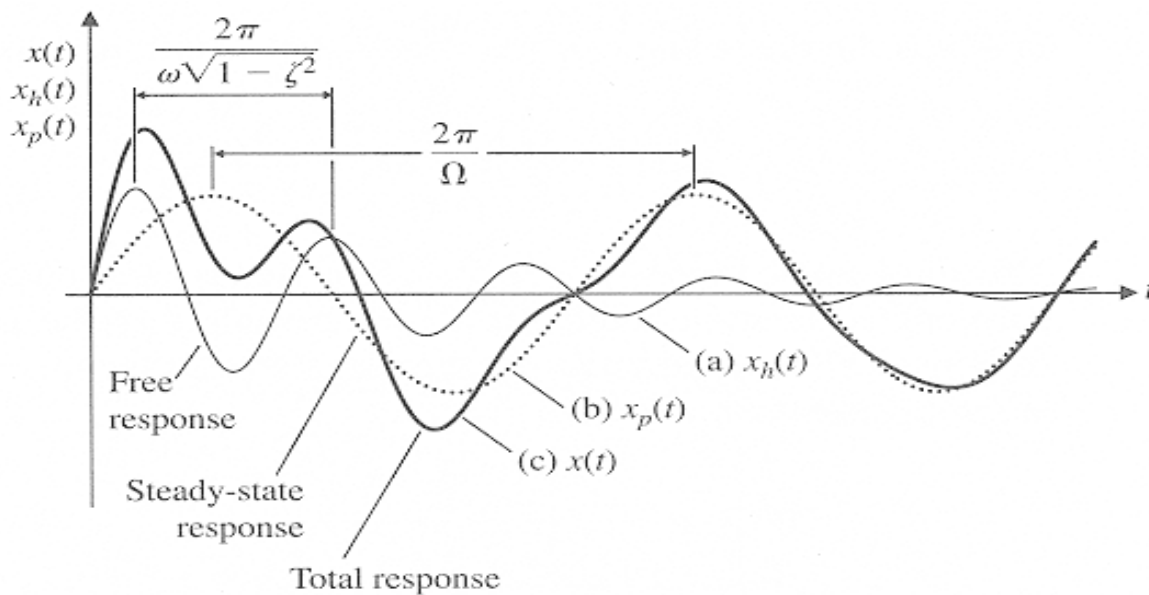
5.3 PRISILNE HARMONIJSKE VIBRACIJE S VISKOZNI PRIGUŠENJEM



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t$$

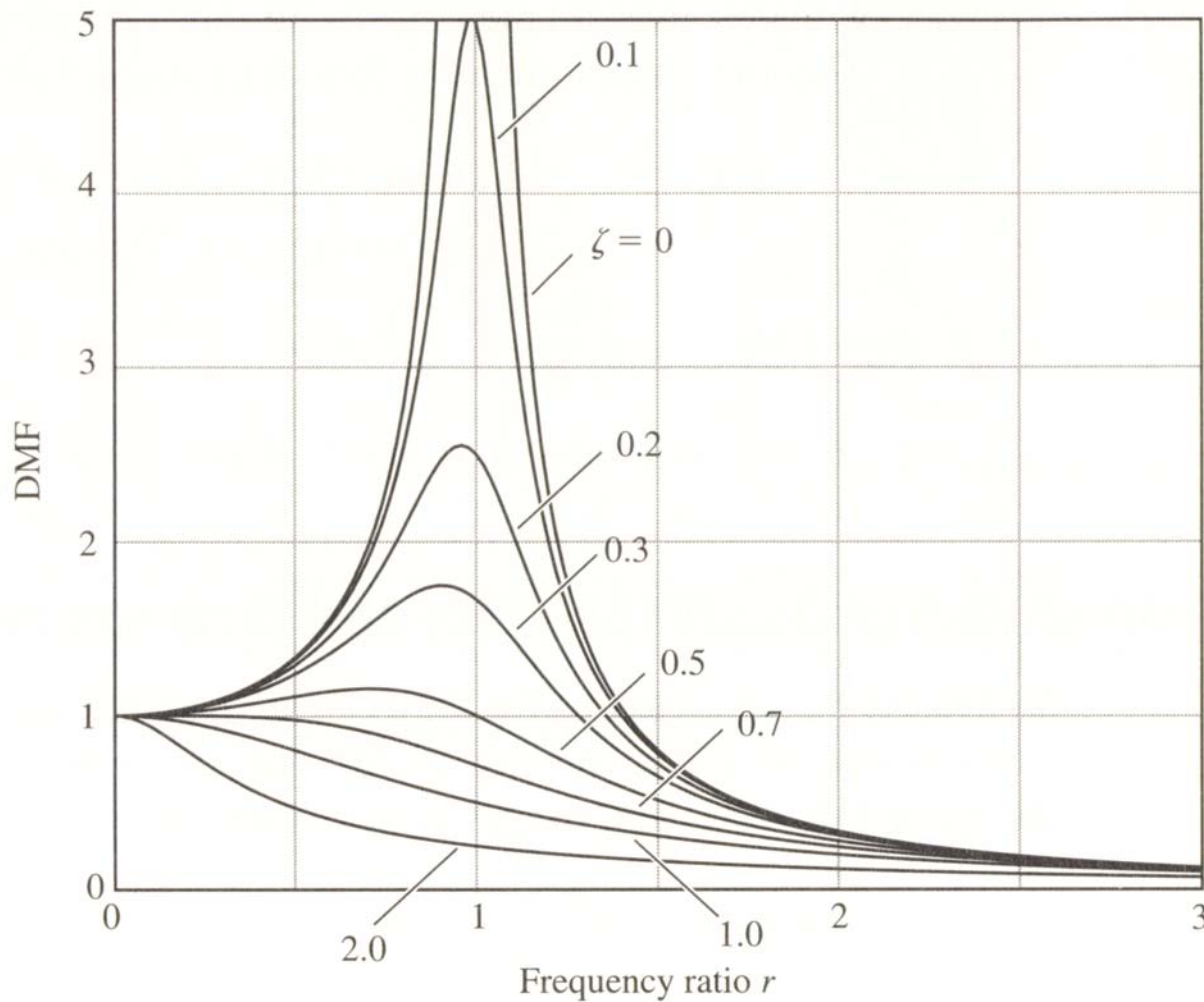
$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) + \frac{X_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\Omega t - \psi)$$

$$x(t) = X e^{-\xi\omega t} (\sin \omega_d t + \varphi) + \frac{X_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\Omega t - \psi)$$



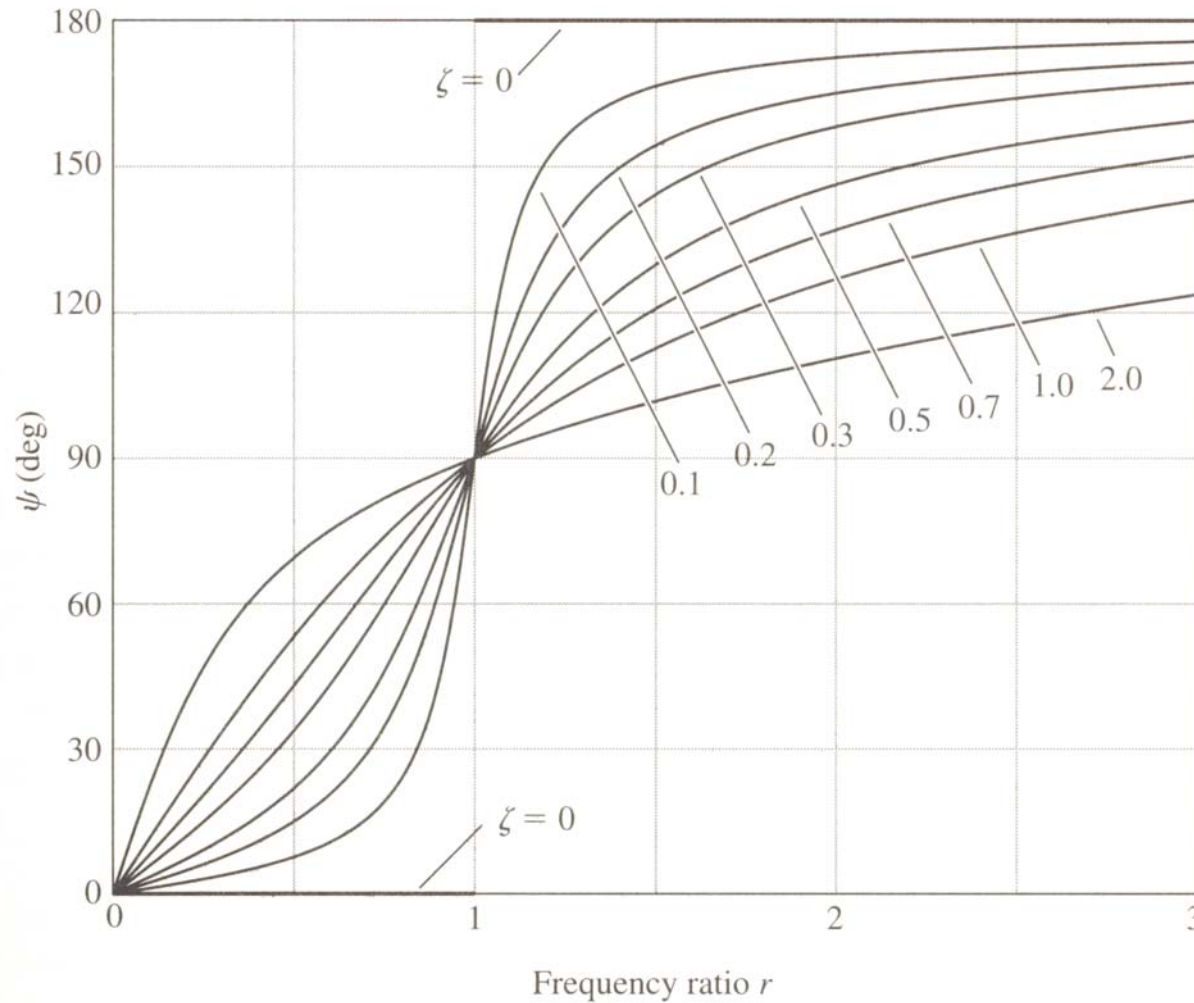
Odziv viskozno
prigušenog sustava
s jednim stupnjem
slobode na
harmonijsku
uzbudu

5.4 UTJECAJ KOEFICIJENTA PRIGUŠENJA NA USTALJENI ODZIV



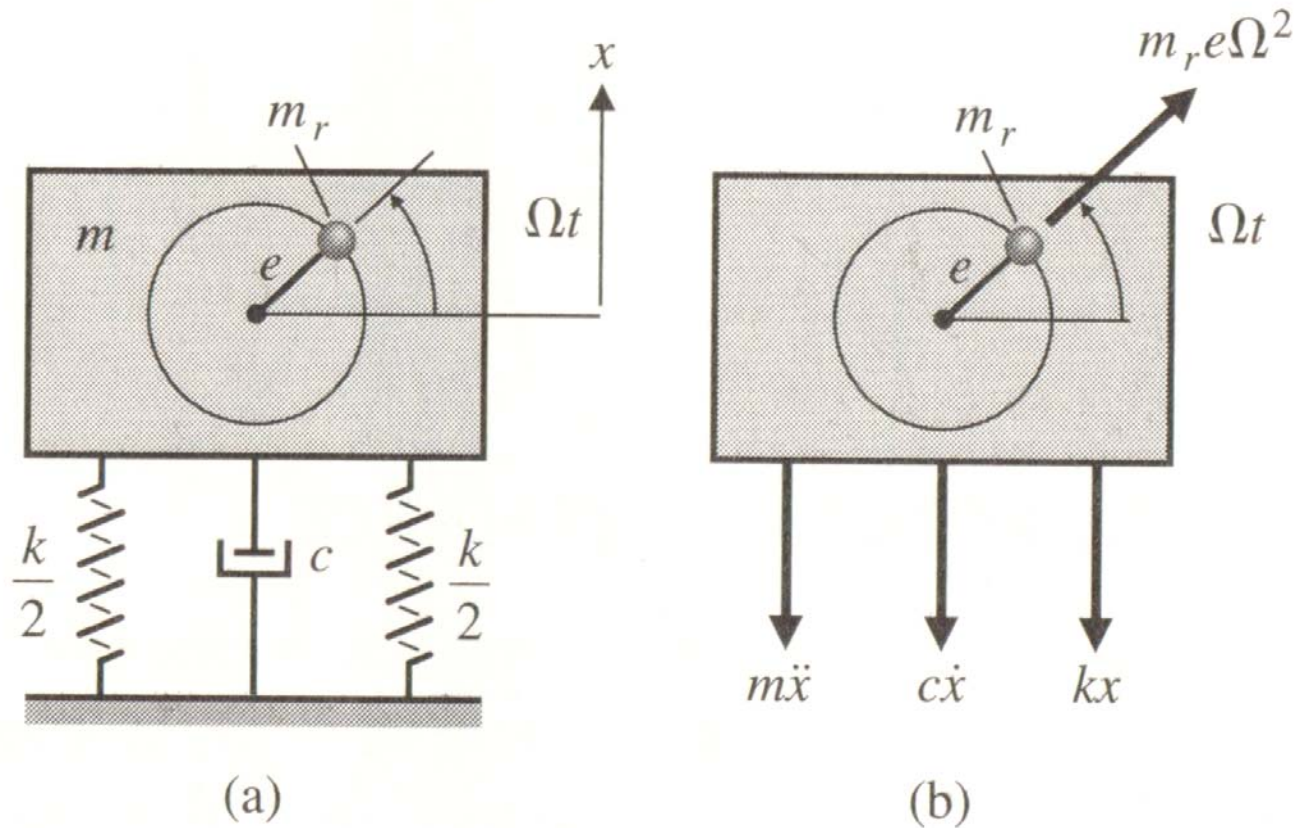
Odnos koeficijenta dinamičkog uvećanja (DMF) i omjera frekvencija r za različite stupnjeve prigušenja

5.4 UTJECAJ KOEFICIJENTA PRIGUŠENJA NA USTALJENI ODZIV

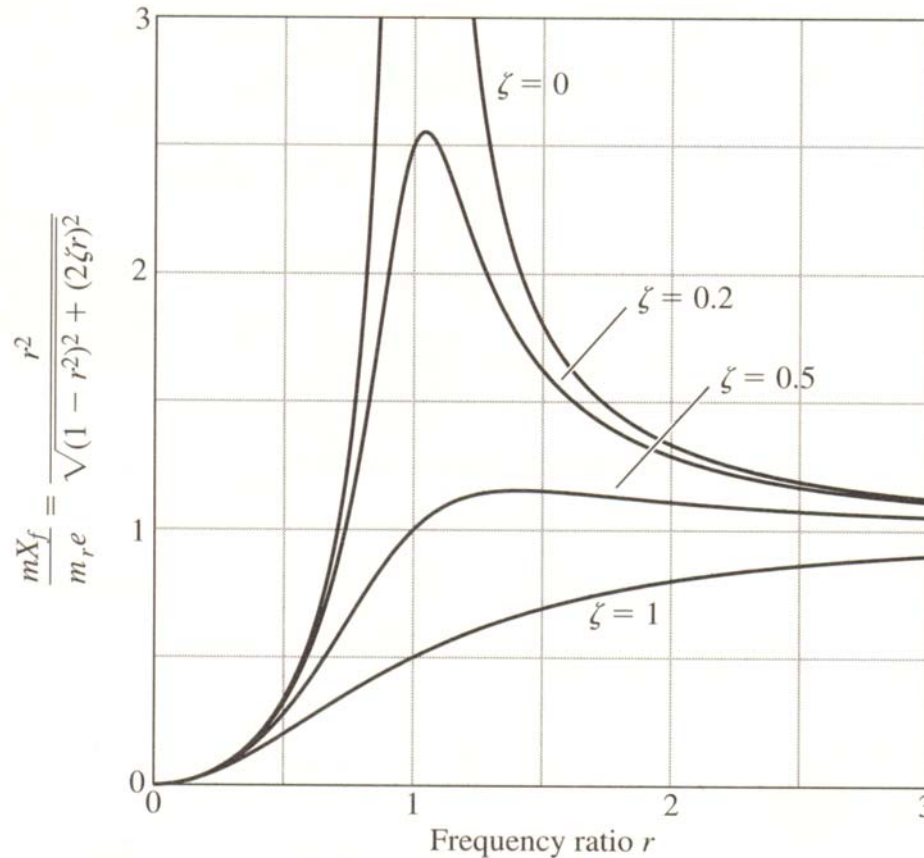


Odnos faznog kuta i omjera frekvencija za različite stupnjeve prigušenja

5.5 HARMONIJSKE OSCILACIJE USLJED ROTACIJE EKSCENTRIČNE MASE

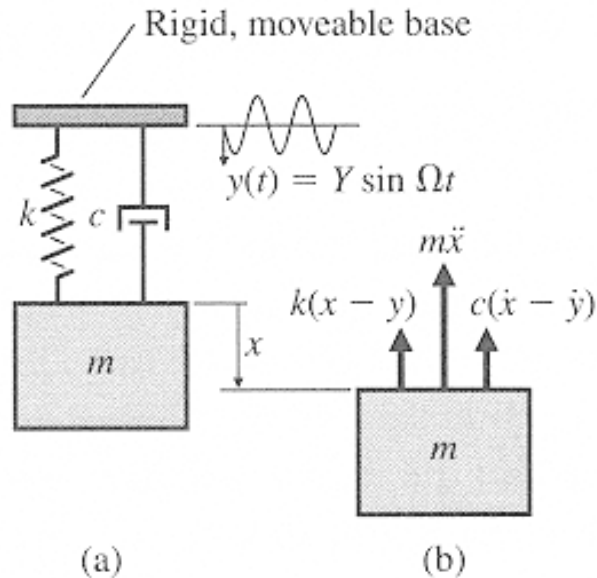


5.5 HARMONIJSKE OSCILACIJE USLJED ROTACIJE EKSCENTRIČNE MASE



Trajni dio amplitude odziva SDOF sustava s ekscentričnom rotacijom

5.6 OSCILACIJE TEMELJA



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY \sin \Omega t + c\Omega Y \cos \Omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Y\sqrt{k^2 + (c\Omega)^2} \sin(\Omega t - \gamma)$$

$$\gamma = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{c\Omega}{k}\right) = \operatorname{tg}^{-1}(-2\xi r)$$

Trajni dio pomaka mase:

$$x(t) = \frac{Y\sqrt{1 + (2\xi r)^2} X_f}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\Omega t - \beta)$$

$$\beta = \gamma + \psi, \quad \psi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right)$$

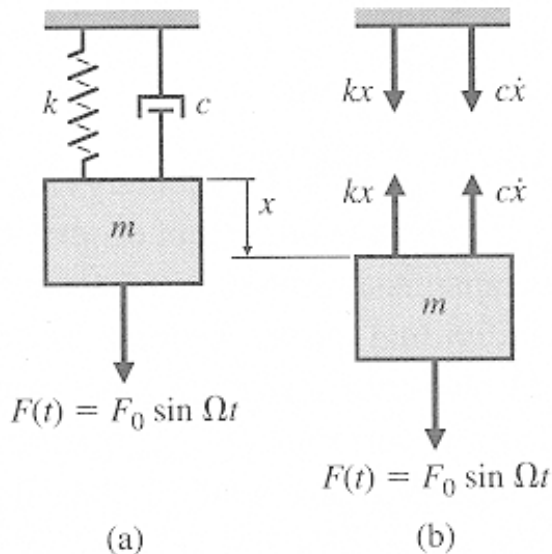
PRENOSIVOST (transmissibility)

mjera gibanja koje se prenosi na masu
usljed oscilacija temelja

$$T_r = \left| \frac{X_f}{Y} \right| = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

5.7 IZOLACIJA VIBRACIJA I PRENOSIVOST

- izolacija sila i pomaka;
- **izolatori vibracija** (prirodne frekvencije mnogo manje od frekvencije uzbude koju izoliramo);



Sila koja se prenosi na temelje:

$$F_T = kx + c\dot{x} = X_f \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2} \sin(\Omega t - \beta)$$

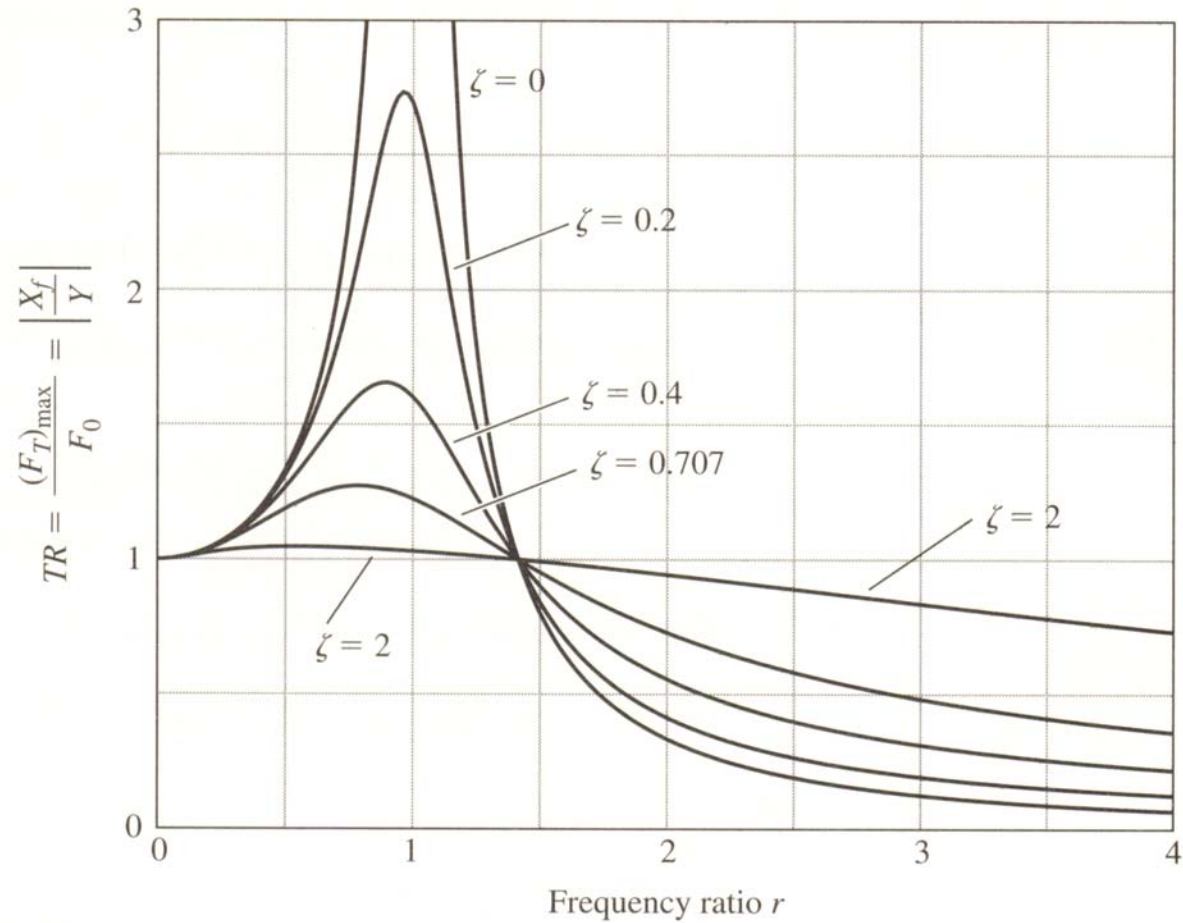
$$(F_T)_{max} = X_f \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2} = \frac{X_0 \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Prenosivost :

$$Tr = \frac{(F_T)_{max}}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \mu_{din} \sqrt{1 + (2\xi r)^2}$$

Izolacija vibracija može se postići samo u području $r > \sqrt{2}$, pri čemu su najučinkovitiji apsorberi opruge s malim ili gotovo nikakvim prigušenjem.

5.7 IZOLACIJA VIBRACIJA I PRENOSIVOST



Prenosivost **TR** kao funkcija omjera frekvencija i prigušenja