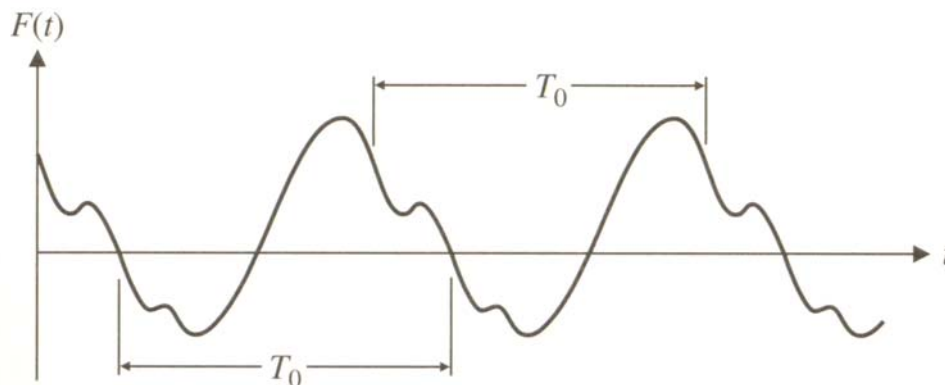


6 ODZIV NA PERIODIČKE I OPĆE DINAMIČKE UZBUDE

6.1 ODZIV NA PERIODIČKU UZBUDU

Periodička se uzbuđa ponavlja u jednolikim vremenskim intervalima ili periodima.



$$F(t) = F(t + T_0)$$

FOURIEROV RED

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} F(t) dt$$

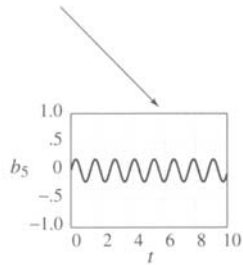
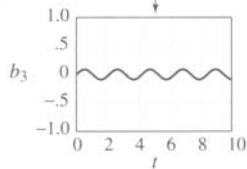
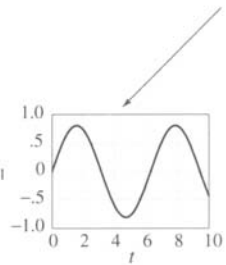
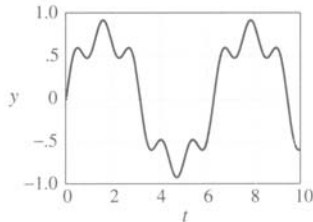
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} F(t) \cos(n\Omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} F(t) \sin(n\Omega t) dt$$

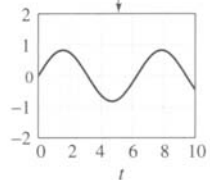
- u slučajevima kada se signal sile ne uprosječuje oko nule, imamo konstantan odmak;

- kako su konstante parne funkcije, odmak je jednak a_0 ;

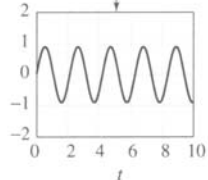
6.1 ODZIV NA PERIODIČKU UZBUDU



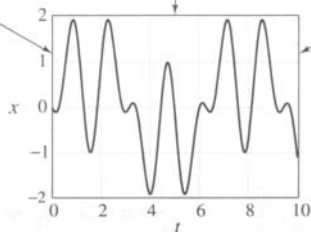
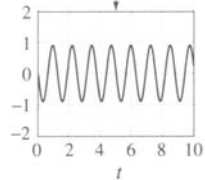
System



System



System



- trajni dio odziva dobije se superpozicijom pojedinačnih partikularnih rješenja za sve harmonijske izraze od $F(t)$:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\Omega t - \psi_n) + b_n \sin(n\Omega t - \psi_n)}{k\sqrt{(1-n^2r^2)^2 + (2\xi nr)^2}}$$

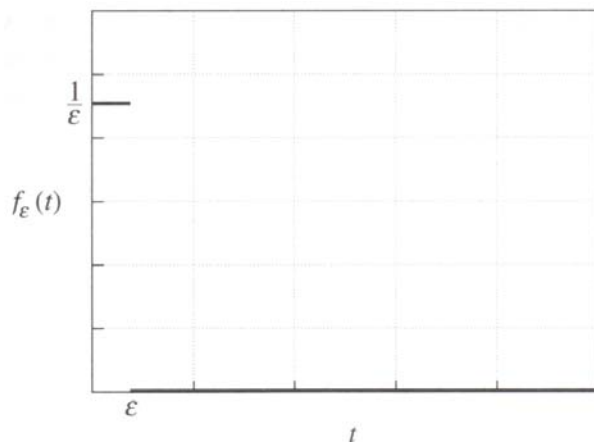
$$\psi_n = \arctg\left(\frac{2\xi nr}{1-n^2r^2}\right), \quad r = \frac{\Omega}{\omega}$$

- prijelaz s vremenske na frekvencijsku domenu (projektiranje, revizije, nadzori, ispitivanje konstrukcija i materijala).

6.2 ODZIV NA JEDINIČNI IMPULS

Kratko djelovanje opterećenja : ne može se zanemarivati prolazni dio odziva.

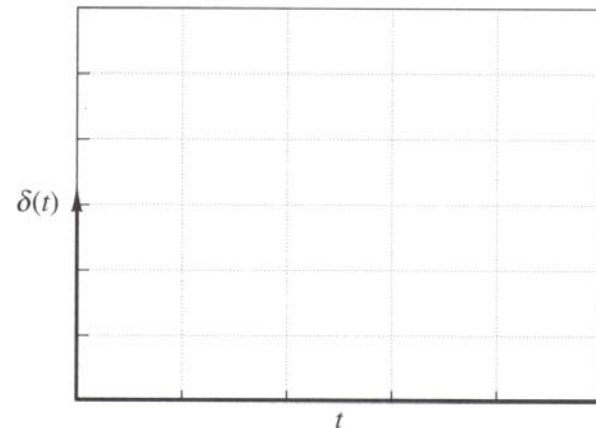
Sila impulsa – sila velikog intenziteta kratkog trajanja.



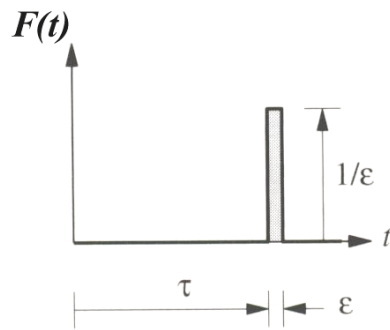
$$F(t) = \frac{1}{\epsilon}, \quad 0 < t \leq \epsilon$$

Za $\epsilon \rightarrow 0$: veličina sile $\rightarrow \infty$;
matematički se ova funkcija definira pomoću tzv.
DIRAC DELTA funkcije: $\delta(t)$.

JEDINIČNI IMPULS: površina ispod funkcije $F(t)$ uvijek je jednaka 1.



6.2 ODZIV NA JEDINIČNI IMPULS



$$\delta(t - \tau)$$

Djelovanje sile: jedinični impuls koncentriran u trenutku τ :

$$F(t) = \frac{1}{\epsilon}, \quad \tau < t \leq \tau + \epsilon$$

Sukladno II. Newtonovom zakonu:

$$F(t) = m\ddot{u}$$

odnosno za konstantnu masu

$$F(t) = \frac{d}{dt}(m\dot{u})$$

Integriranjem obje strane po vremenu t , dobije se

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = m(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m\Delta\dot{u}$$

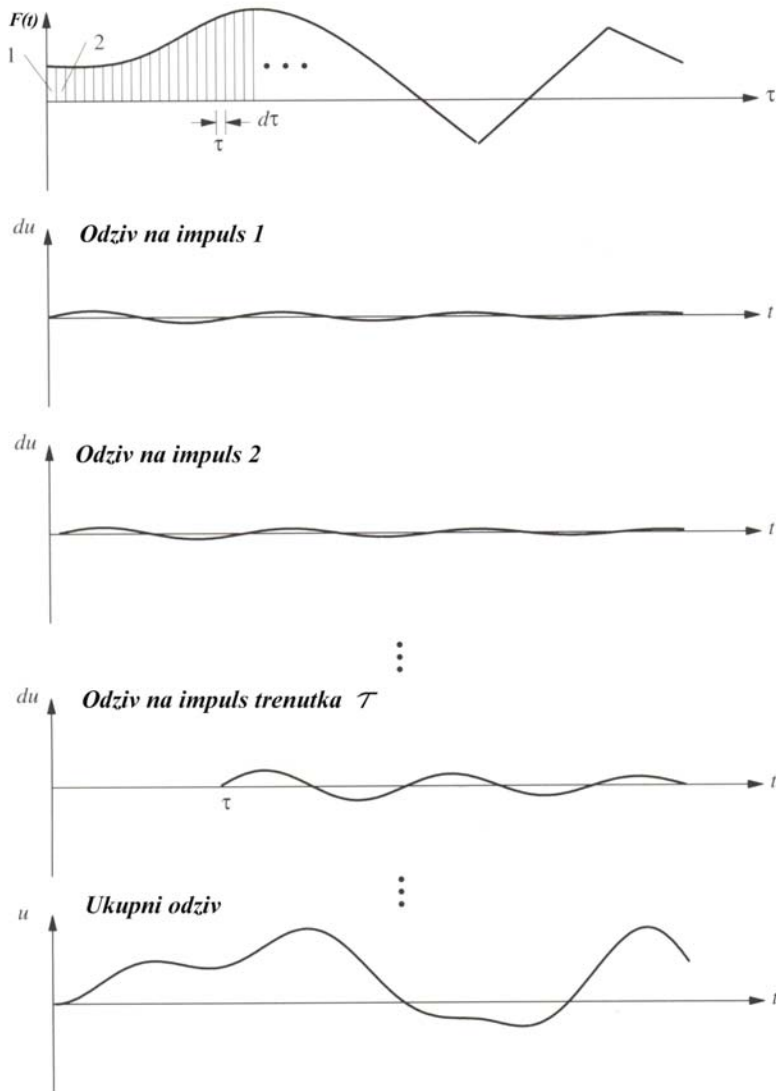
Veličina impulsa

Količina gibanja



$h(t - \tau)$ - funkcija odziva na jedinični impuls

6.3 ODZIV NA PROIZVOLJNU OPĆU SILU (DUHAMELOV INTEGRAL – INTEGRAL KONVOLUCIJE)



Proizvoljna opća sila $F(t)$ može se prikazati nizom infinitezimalno malih impulsa. Odziv linearnog dinamičkog sustava na jedan od tih impulsa koji djeluje u trenutku τ a veličine je $F(\tau) d\tau$ jednak je umnošku veličine sile i funkcije odziva na jedinični impuls:

$$du(t) = [F(\tau) d\tau] h(t - \tau) \quad \text{za } t > \tau$$

Odziv sustava u trenutku t suma je odziva na sve impulse koji su djelovali do tog trenutka:

$$u(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

(integral konvolucije).

6.3 ODZIV NA PROIZVOLJNU OPĆU SILU (DUHAMELOV INTEGRAL – INTEGRAL KONVOLUCIJE)

Primjena integrala konvolucije na sustav s jednim stupnjem slobode daje Duhamelov integral:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

odnosno za neprigušeni sustav:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau.$$

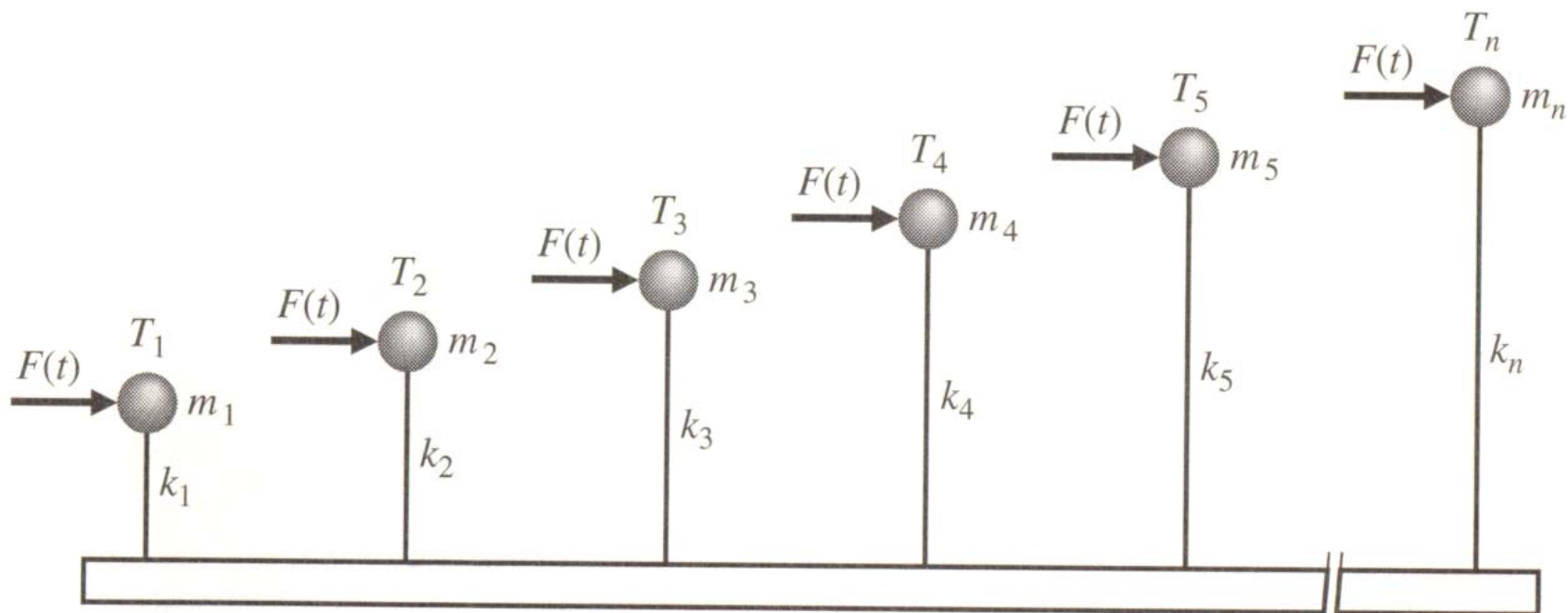
Ako su zadani početni uvjeti $u(0)$ i $\dot{u}(0)$, rezultatni se odziv dobije sumiranjem s prethodno definiranim izrazima (slobodne oscilacije).

Primjena Duhamelovog integrala :

- linearni sustavi (zbog pravila superpozicije)
- rješenje Duhamelovog integrala: analitički i numerički.

6.4 SPEKTAR ODZIVA (“RESPONSE SPECTRUM”)

- Prikaz max. vršnog odziva na određenu uzbudu u odnosu na pojedine dinamičke karakteristike različitih konstrukcijskih sustava (vlastiti periodi i frekvencije);
- Vršni odziv (pomak, brzina, ubrzanje) dobije se za skup oscilatora s jednim stupnjem slobode (SDOF) za skup različitih vlastitih perioda ili frekvencija, variranjem koeficijenta prigušenja.



6.4 SPEKTAR ODZIVA (“RESPONSE SPECTRUM”)

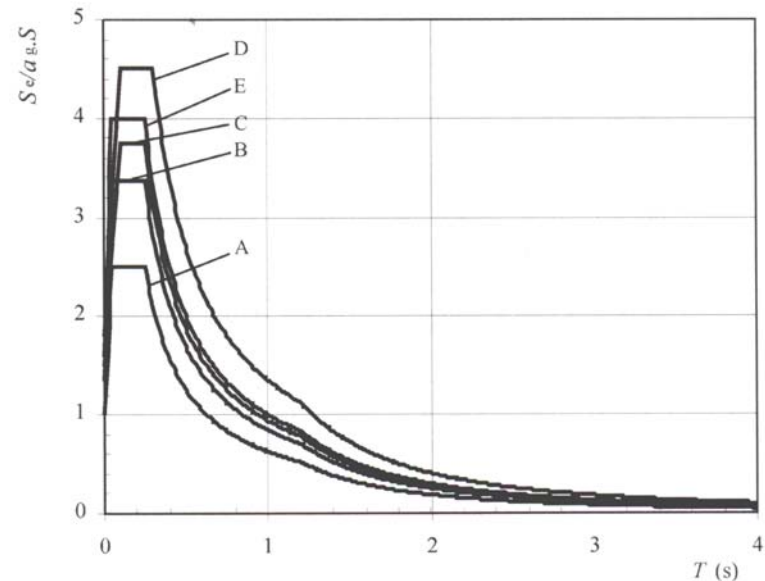
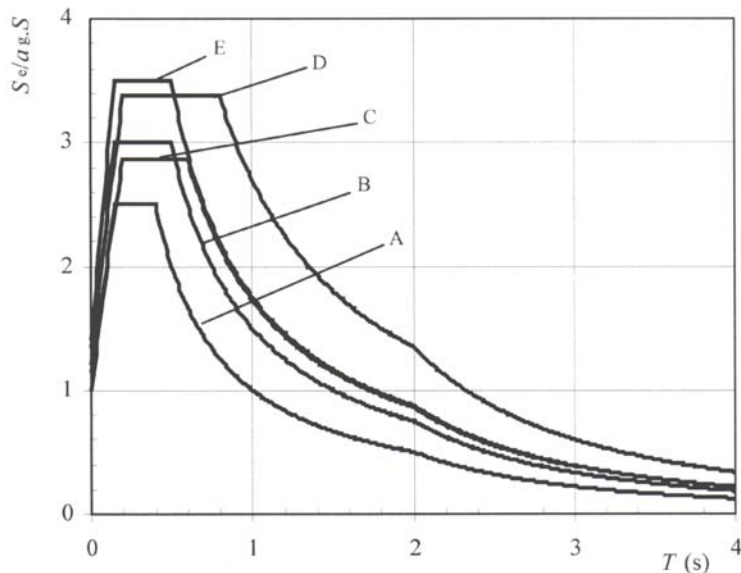
A) Rješenje Duhamelovog integrala

$$[x(t)]_{max} = \left| \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \right|_{max}$$

B) Numerička integracija

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{F(t)}{m} \Rightarrow x_{max}$$

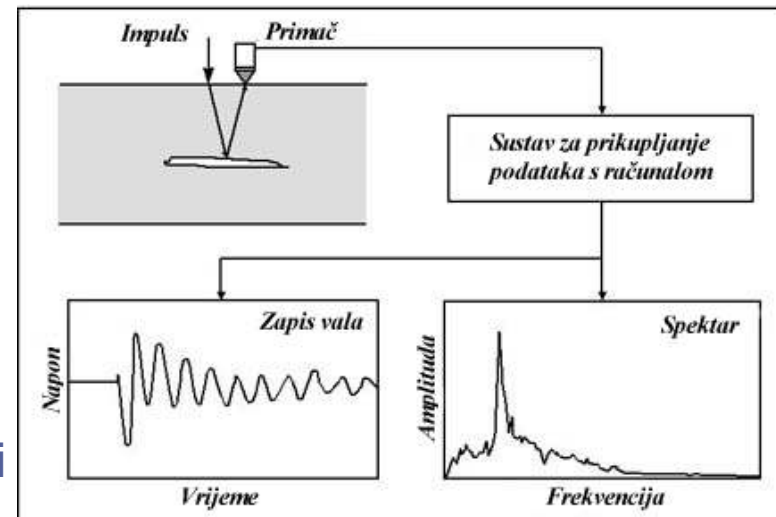
⇒ skup krivulja spektra odziva za različite vrijednosti prigušenja



7 DINAMIČKA ANALIZA U FREKVENCIJSKOJ DOMENI

Dva su pristupa u analizi i prikazu dinamičkog odziva sustava s jednim stupnjem slobode (SDOF) izloženog djelovanju opće uzbudne sile:

- **Rješenje u vremenskoj domeni**
 - Jednadžbe gibanja rješavaju se integriranjem po vremenu;
 - Metode rješavanja inženjerskih zadaća u većini su slučajeva numeričke.
- **Rješenje u frekvencijskoj domeni**
 - Određuju se koeficijenti amplituda rješenja Fourierovog reda za svaku pojedinu frekvenciju;
 - Fourierovi koeficijenti se najčešće određuju numerički (diskretna Fourierova transformacija s N brojem konačnih točaka);
 - Danas se u programima najčešće koristi postupak tzv. brze transformacije (FFT=Fast Fourier Transform), s $N=2^L$ brojem konačnih točaka.



Primjena frekventnog zapisa u ispitivanju konstrukcija