7 NUMERIČKO ODREĐIVANJE DINAMIČKOG ODZIVA

- Analitičko tj. rješenje Duhamelovog integrala u zatvorenom obliku može biti veoma zahtjevno čak i za relativno jednostavne uzbudne funkcije;
- Rješavanje je nemoguće ako se sila uzbude ne može izraziti kao jedinstvena matematička funkcija ili postoji samo njen digitalni zapis;
- Kod većine praktičnih problema, dinamički se odziv konstrukcije određuje nekom od ***numeričkih metoda*** koje se temelje na jednom od dva pristupa:
  - ***Numerička interpolacija*** uzbude ili Duhamelovog integrala
  - ***Direktna numerička integracija*** jednadžbe gibanja;
- Oba su pristupa primjenjiva kod linearnih sustava dok se kod nelinearnih sustava mogu primijeniti samo direktne metode.

7.1 METODE PO PRINCIPU "KORAK PO KORAK"

- Jednadžba gibanja neelastičnog sustava koju rješavamo numerički je oblika

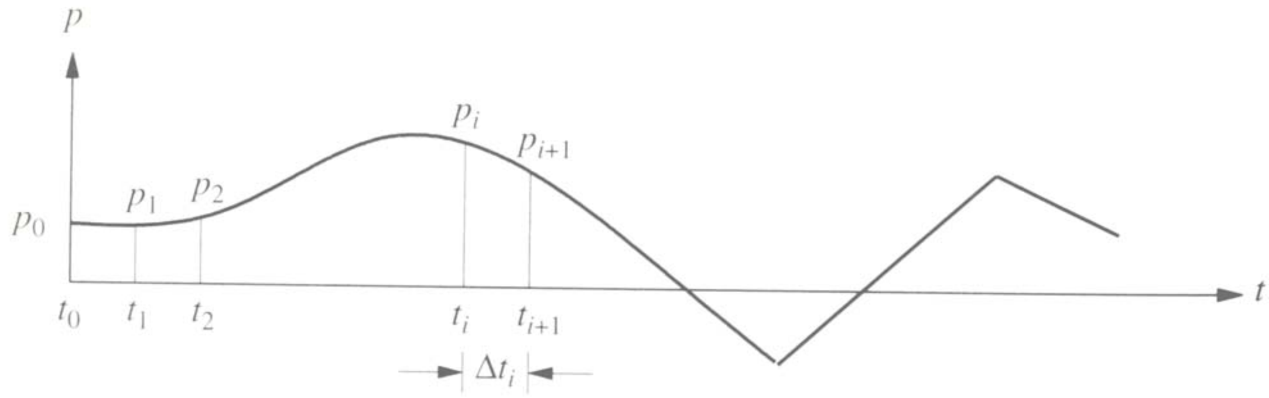
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f_s(x, \dot{x}) = p(t) \quad ili \quad -m\ddot{x}_g(t)$$

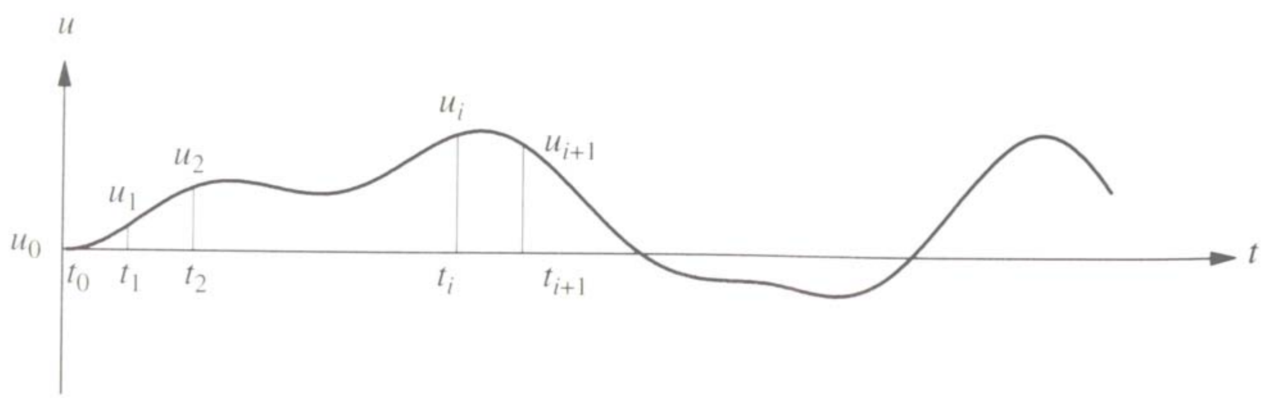
uz poznate početne uvjete

$$x_0 = x(t=0) \qquad \dot{x}_0 = \dot{x}(t=0)$$

- Zadano vanjsko opterećenje ***p(t)*** promatramo kao skup diskretnih vrijednosti ***$p_i = p(t_i)$, i =1 do N***.
- Vremenski je interval ***$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$*** najčešće konstantan (nije neophodno).
- Odziv konstrukcije (pomak, brzina, ubrzanje) se određuje u diskretnim vremenskim trenucima ***t_i***.

7.1 METODE PO PRINCIPU “KORAK PO KORAK”





7.1 METODE PO PRINCIPU "KORAK PO KORAK"

Pretpostavimo da su nam u trenutku ***t=i*** poznati pomak, brzina i ubrzanje, tj.

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + (f_s)_i = p_i$$

gdje je $(f_s)_i$ reakcija u trenutku i,

$(f_s)_i = kx_i$ za linearno elastične sustave.

Numeričkim postupcima pomoću poznatih veličina u trenutku ***t=i*** određujemo pomak, brzinu i ubrzanje u trenutku ***t=i+1***,

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + (f_s)_{i+1} = p_{i+1}$$

Ponavljanjem koraka za ***i=0,1,2,3,...,*** dobivamo odziv u svakom trenutku vremena ***i=1,2,3...***

Početni uvjeti za ***t=0*** neophodni su za početak iterativnog postupka.

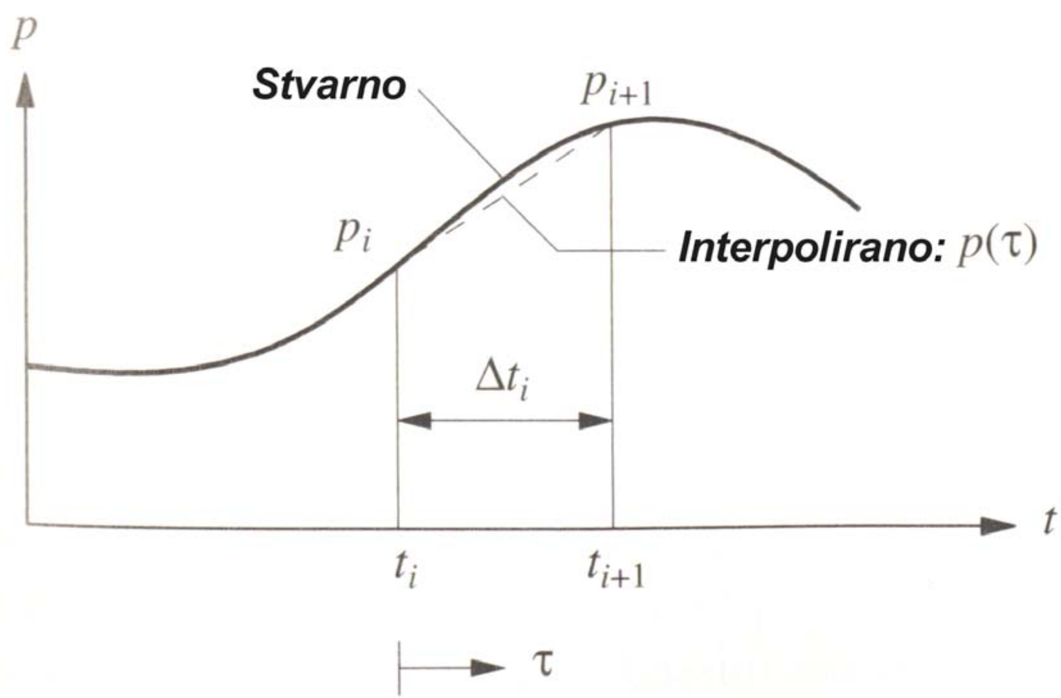
7.1 METODE PO PRINCIPU “KORAK PO KORAK”

Prijelaz iz trenutka ***i*** do ***i+1*** je približan postupak.

Svaka numerička metoda mora zadovoljavati tri neophodna uvjeta:

- **Konvergencija** (smanjivanjem vremenskog koraka, numeričko rješenje treba težiti točnom rješenju);
- **Stabilnost** (numeričko rješenje mora biti stabilno s obzirom na numeričku pogrešku zaokruživanja);
- **Točnost** (numerički postupka mora davati rješenja koja su dovoljno bliska točnom rješenju).

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE



$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE

Pomak u trenutku ***t = i+1***:

$$x_{i+1} = e^{-n\,\Delta t}\left(x_i \cos\omega_D \Delta t + \frac{\dot{x}_i + n x_i}{\omega_D}\sin\omega_D \Delta t\right) + \frac{F_i}{k}\left[1 - e^{-n\,\Delta t}\left(\cos\omega_D \Delta t + \frac{n}{\omega_D}\sin\omega_D \Delta t\right)\right] +$$

$$+\frac{F_{i+1} - F_i}{k\Delta t}\left[\Delta t - \frac{2n}{\omega_D^2} + e^{-n\,\Delta t}\left(2\frac{n}{\omega^2}\cos\omega_D \Delta t - \frac{\omega^2 - n^2}{\omega \cdot \omega_D}\sin\omega_D \Delta t\right)\right]$$

Brzina u trenutku ***t = i+1***:

$$\dot{x}_{i+1} = e^{-n\,\Delta t}\left(\dot{x}_i \cos\omega_D \Delta t - \frac{n\dot{x}_i + \omega^2 x_i}{\omega_D}\sin\omega_D \Delta t\right) + \frac{F_i}{k}\frac{\omega^2}{\omega_D} e^{-n\,\Delta t}\sin\omega_D \Delta t +$$

$$+\frac{F_{i+1} - F_i}{k\Delta t}\left[1 - e^{-n\,\Delta t}\left(\cos\omega_D \Delta t + \frac{n}{\omega_D}\sin\omega_D \Delta t\right)\right]$$

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE

Prethodne se jednažbe mogu zapisati u obliku:

$$x_{i+1} = Ax_i + B\dot{x}_i + Cp_i + Dp_{i+1}$$
$$\dot{x}_{i+1} = A'x_i + B'\dot{x}_i + C'p_i + D'p_{i+1}$$

pri čemu su:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}, \quad n = \xi\omega$$

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE

$$A = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)$$

$$B = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$C = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_D\Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t - \left(1+\frac{2\xi}{\omega\Delta t}\right)\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$D = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_D\Delta t}\sin\omega_D\Delta t + \frac{2\xi}{\omega\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE

$$A' = -e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$B' = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\cos\omega_D\Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$C' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$D' = \frac{1}{k\Delta t}\left[1 - e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

Primjer

Sustav s jednim stupnjem slobode (SDOF) ima sljedeća svojstva:

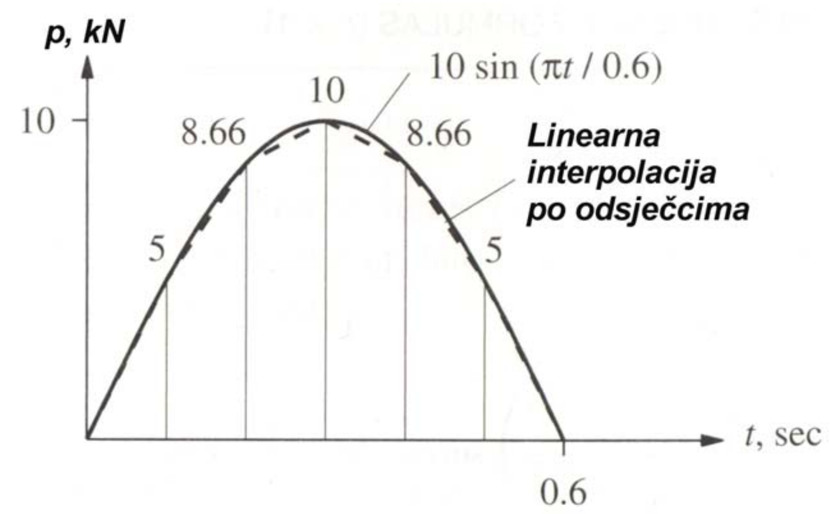
m = 0,2533 kN-sec2/cm

k = 10 kN/cm

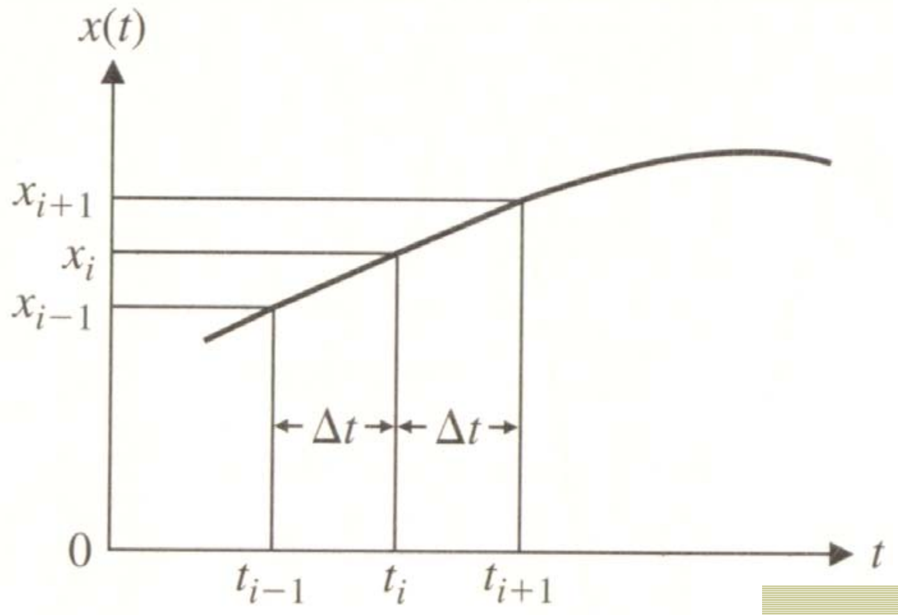
T = 1 sec (ω=6,283 rad/sec)

ξ = 0,05.

Odredite odziv sustava x(t) na djelovanjeuzbude p(t) jednog poluciklusa sinusnog vala (prikazano na slici) numeričkom metodom s vremenskim intervalom (korakom iteracije) Δt=0,1 sec.



7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI
(aproksimacija diferencijalnih izraza diferencijskim)



$$\dot{x}_i = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{x}_i = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t_i} = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_i+(\Delta t/2)} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_i-(\Delta t/2)}\right]}{\Delta t}$$

$$\ddot{x}_i = \frac{\left[\left(x_{i+1} - x_i\right)/\Delta t - \left(x_i - x_{i-1}\right)/\Delta t\right]}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$m\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2} + c\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} + kx_i = p_i$$

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right]x_{i+1} = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]x_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right]x_i$$

7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI

$$\hat{k}x_{i+1} = \hat{p}_i$$

$$\hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}$$

$$\hat{p}_i = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]x_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right]x_i$$

$$x_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$$

7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI

$$\dot{x}_0 = \frac{x_1 - x_{-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{x}_0 = \frac{x_1 - 2x_0 + x_{-1}}{\left(\Delta t\right)^2}$$

$$x_{-1} = x_0 - \Delta t\left(\dot{x}_0\right) + \frac{\left(\Delta t\right)^2}{2}\ddot{x}_0$$

$$m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 = p_0$$

$$\ddot{x}_0 = \frac{p_0 - c\dot{x}_0 - kx_0}{m}$$

7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI

Odabrani vremenski interval mora biti dovoljno mali da bi dobili rezultate zadovoljavajuće točnosti, tj.

$$\frac{\Delta t}{T} < \frac{1}{\pi}$$

Obično se uzima: $$\frac{\Delta t}{T} \leq 0{,}1$$

ALGORITAM
METODE CENTRALNIH DIFERENCI

1.0 Početni proračuni

1.1 $\ddot{x}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{x}_0 - kx_0}{m}$

1.2 $x_{-1} = x_0 - \Delta t\,\dot{x}_0 + \dfrac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{x}_0$

1.3 $\hat{k} = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} + \dfrac{c}{2\Delta t}$

1.4 $a = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} - \dfrac{c}{2\Delta t}$

1.5 $b = k - \dfrac{2m}{(\Delta t)^2}$

*2.0 Proračuni za vremenski trenutak **i***

2.1 $\hat{p}_i = p_i - ax_{i-1} - bx_i$

2.2 $x_{i+1} = \dfrac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$

3.0 Sljedeći vremenski trenutak

*Zamijeniti **i** sa **i+1** i ponoviti korake 2.1 i 2.2 za sljedeći trenutak vremena.*

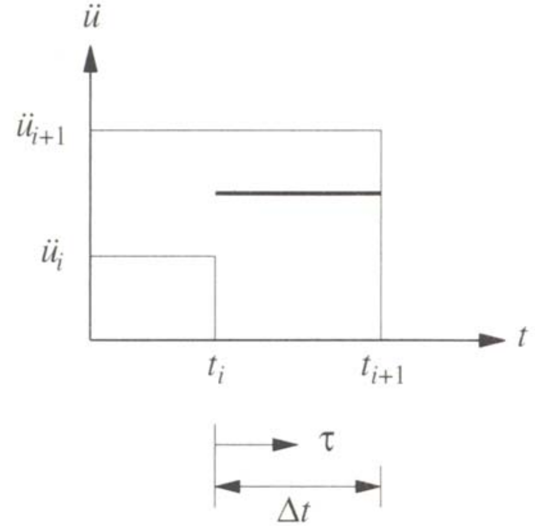
7.4 NEWMARKOVA METODA

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \left[(1-\gamma)\Delta t\right]\ddot{x}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{x}_{i+1}$$
$$x_{i+1} = x_i + (\Delta t)\dot{x}_i + \left[(0{,}5-\beta)(\Delta t)^2\right]\ddot{x}_i + \left[\beta(\Delta t)^2\right]\ddot{x}_{i+1}$$

Parametri β i γ definiraju promjenu ubrzanja preko intervala vremena te stabilnost i točnost metode.

7.4 NEWMARKOVA METODA

Prosječno (konstantno) ubrzanje



$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

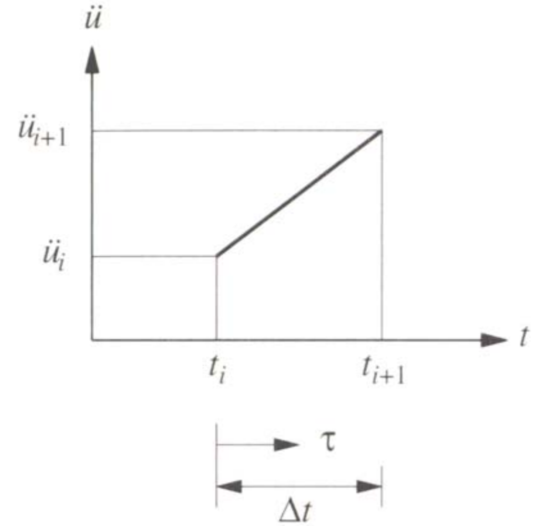
$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

Linearno promjenljivo ubrzanje



$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i\tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \ddot{u}_i\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + (\Delta t)^2\left(\frac{1}{6}\ddot{u}_{i+1} + \frac{1}{3}\ddot{u}_i\right)$$

ALGORITAM NEWMARKOVE METODE

Specijalni slučajevi

(1) Metoda prosječnog ubrzanja ($\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$)

(2) Metoda linearno promjenjivog ubrzanja ($\gamma = 1/2$, $\beta = 1/6$)

1.0 Početni proračuni

1.1 $\ddot{x}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{x}_0 - kx_0}{m}$

1.2 Odabrati Δt

1.3 $\hat{k} = k + \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \dfrac{1}{\beta (\Delta t)^2} m$

1.4 $a = \dfrac{1}{\beta \Delta t} m + \dfrac{\gamma}{\beta} c$

1.5 $b = \dfrac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\dfrac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c$

2.0 Proračuni za vremenski trenutak i

2.1 $\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a\dot{x}_i - b\ddot{x}_i$

2.2 $\Delta x_i = \dfrac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}}$

2.3 $\Delta \dot{x}_i = \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta x_i - \dfrac{\gamma}{\beta} \dot{x}_i + \Delta t \left(1 - \dfrac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{x}_i$

2.4 $\Delta \ddot{x}_i = \dfrac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta x_i - \dfrac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_i - \dfrac{1}{2\beta} \ddot{x}_i$

2.5 $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_i, \quad \ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \Delta \ddot{x}_i$

3.0 Sljedeći vremenski trenutak

*Zamijeniti **i** sa **i+1** i ponoviti korake 2.1 do 2.5 za sljedeći trenutak vremena.*