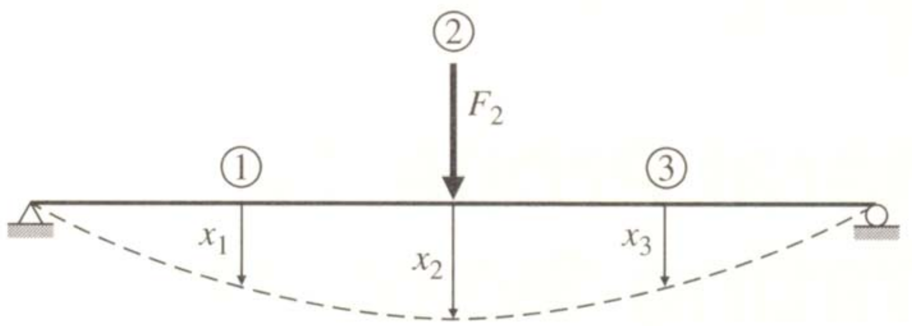
SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

8.1 MATRICA POPUSTLJIVOSTI [a]

- veza između sila i pomaka;



Pretpostavimo da sila djeluje na mjestu *2*,
tada su pripadajući progibi:

$$x_1 = a_{12}\, F_2$$

$$x_2 = a_{22}\, F_2$$

$$x_3 = a_{32}\, F_2$$

gdje su a_{12}, a_{22} i a_{32} – koeficijenti popustljivosti, tako da je

a_{12} – progib na mjestu *1* usljed jedinične sile na mjestu *2*

a_{22} – progib na mjestu *2* usljed jedinične sile na mjestu *2*

a_{32} – progib na mjestu *3* usljed jedinične sile na mjestu *2*

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

Ako na isti način primijenimo sile $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ i $\mathbf{F_3}$ redom na mjestima *1*, *2* i *3*, jednadžbe su pomaka oblika:

$$x_1 = a_{11}\, F_1 + a_{12}\, F_2 + a_{13}\, F_3$$
$$x_2 = a_{21}\, F_1 + a_{22}\, F_2 + a_{23}\, F_3$$
$$x_3 = a_{31}\, F_1 + a_{32}\, F_2 + a_{33}\, F_3$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \{x\} = [a]\{F\}.$$

Matrica popustljivosti linearno-elastičnih sustava je simetrična, što je posljedica Maxwellovog zakona o uzajamnosti pomaka:

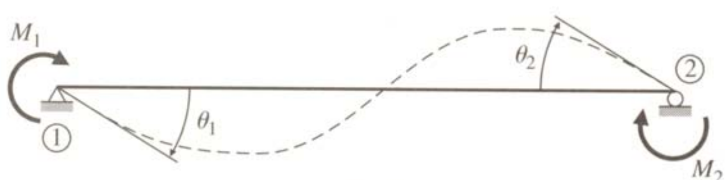
$$a_{ij} = a_{ji}.$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

8.2 MATRICA KRUTOSTI [k]

(a)



(b)

- veza između sila i deformacija;

Pretpostavimo da moment savijanja M_1 djeluje na mjestu *1*:

$$M_1 = k_{11}\,\theta_1$$

gdje je k_{11} – koeficijent krutosti (moment na mjestu *1* usljed jedinične rotacije na mjestu *1*).

$$M_1 = k_{11}\,\theta_1 + k_{12}\,\theta_2$$
$$M_2 = k_{21}\,\theta_1 + k_{22}\,\theta_2$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{F\} = [k]\{x\}$$

Općenito, vektor sila sadrži sile i momente a vektor deformacija translacijske pomake i rotacije.

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

Elementi matrice krutosti [k] predstavljaju sile (momente) potrebne za dobivanje jediničnog pomaka (rotacije) na određenom mjestu konstrukcije a da je pri tome spriječen pomak (rotacija) u svim ostalim čvorovima konstrukcije.

(Čvor konstrukcije je mjesto u kojem je definirana koncentrirana masa tj. pripadajući stupanj slobode.)

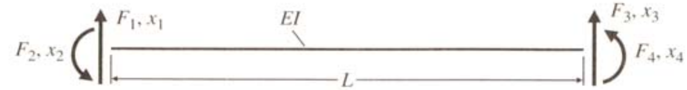
Nadalje, vrijedi:

$$[\mathrm{k}]^{-1}\{\mathrm{F}\} = \{\mathrm{x}\} \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{k}]^{-1} = [\mathrm{a}]$$

$$[\mathrm{a}]^{-1} = [\mathrm{k}]$$

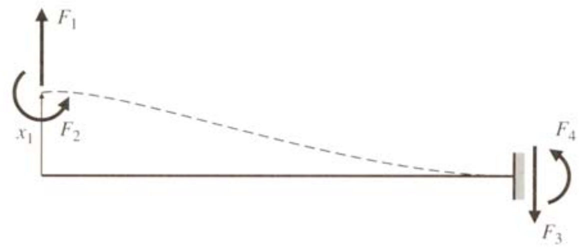
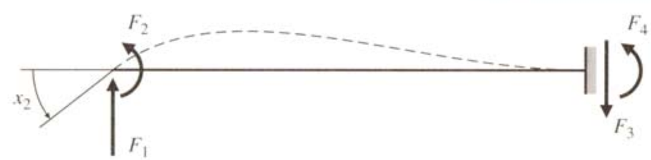
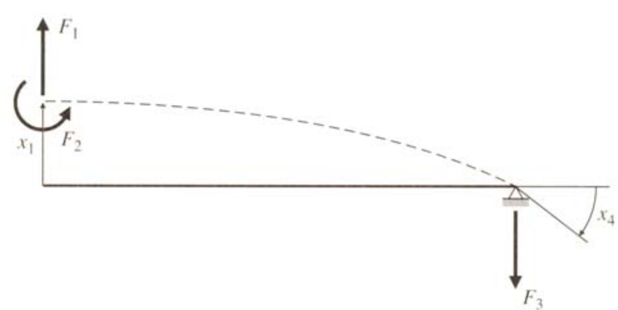
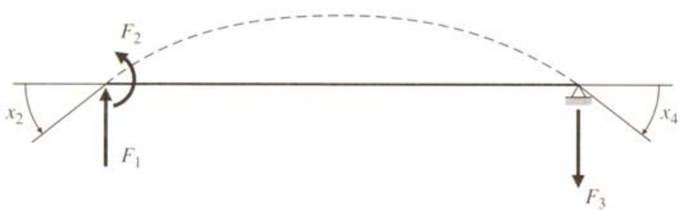
Matrica krutosti linearno-elastičnih sustava je simetrična, što je posljedica Maxwellovog zakona o uzajamnosti pomaka:

$$k_{ij} = k_{ji}.$$



Komponenta sile i pripadajući stupanj slobode

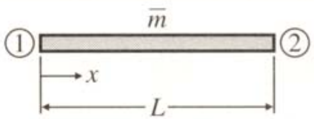
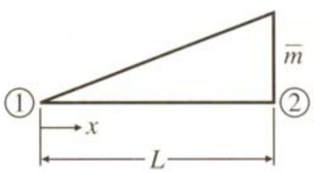
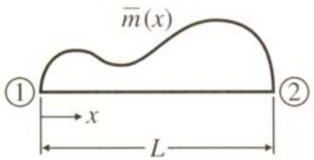
Koeficijenti krutosti elemenata izloženih savijanju

$F_1 = \frac{12EI}{L^3}x_1$ $F_2 = \frac{6EI}{L^2}x_1$		$F_3 = -\frac{12EI}{L^3}x_1$ $F_4 = \frac{6EI}{L^2}x_1$
$F_1 = \frac{6EI}{L^2}x_2$ $F_2 = \frac{4EI}{L}x_2$		$F_3 = -\frac{6EI}{L^2}x_2$ $F_4 = \frac{2EI}{L}x_2$
$F_1 = \frac{3EI}{L^3}x_1$ $F_2 = \frac{3EI}{L^2}x_1$		$F_3 = -\frac{3EI}{L^3}x_1$ $F_4 = 0$ $x_4 = -\frac{3}{2}\frac{x_1}{L}$
$F_1 = \frac{3EI}{L^2}x_2$ $F_2 = \frac{3EI}{L}x_2$		$F_3 = -\frac{3EI}{L^2}x_2$ $F_4 = 0$ $x_4 = -\frac{1}{2}x_2$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

8.3 INERCIJSKA SVOSTVA: **MATRICA MASA [m]**

Raspodjela mase	***Koeficijenti koncentriranih masa***
 (a) Uniform: $\overline{m}(x) = \overline{m}$	$m_1 = \dfrac{\overline{m}L}{2}$ $m_2 = \dfrac{\overline{m}L}{2}$
 (b) Linear: $\overline{m}(x) = \dfrac{\overline{m}}{L}x$	$m_1 = \dfrac{\overline{m}L}{6}$ $m_2 = \dfrac{\overline{m}L}{3}$
 (c) General: $\overline{m}(x)$	$m_1 = \dfrac{\int_0^L \overline{m}(x)(L-x)\,dx}{\int_0^L \overline{m}(x)\,dx}$ $m_2 = \dfrac{\int_0^L \overline{m}(x)x\,dx}{\int_0^L \overline{m}(x)\,dx}$

- sustav koncentriranih masa;

raspodijeljena masa konstrukcije koncentrira se tj. lokalizira u predefinirane čvorove – mjesta u kojima su definirani stupnjevi slobode.

Matrica koncentriranih masa je najčešće dijagonalna (s obzirom da se najčešće uzimaju u obzir inercijski učinci samo usljed translacijskih stupnjeva slobode).

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

8.4 PROBLEM VLASTITIH VRIJEDNOSTI U ANALIZI VIBRACIJA

- Analiza neprigušenih slobodnih vibracija sustava s ***n*** stupnjeva slobode traži rješenje standardnog problema vlastitih vrijednosti:

$$[D]\{A\} = \lambda\{A\}.$$

gdje su [D] – kvadratna, simetrična matrica *n*-tog reda

{A} – vektor rješenja

λ - skalar.

- Postoji ***n*** netrivijalnih rješenja.
- ***r***-to netrivijalno rješenje sastoji se od
  - vlastite vrijednosti λ_r
  - vlastitog vektora $\{A\}_r$, tako da je:

$$[D]\{A\}_r = \lambda_r\{A\}_r, \qquad \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n.$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

- Nadalje je:

$$\left[\left[D\right]-\lambda\left[I\right]\right]\left\{A\right\}=\left\{0\right\}$$

$$\left|\left[D\right]-\lambda\left[I\right]\right|=0$$

karakteristična jednadžba s ***n*** korjena (rješenja)

[D] - dinamička matrica

{λ} – vlastite frekvence sustava

{A} – vlastiti vektori (vlastiti, normalni ili glavni oblici – forme vibriranja)

- Pomnožimo vlastiti vektor proizvoljnom konstantom:

$$\left[D\right]c_r\left\{A\right\}_r=\lambda_r\, c_r\left\{A\right\}_r$$

$$c_r\left\{A\right\}_r=\left\{\Phi\right\}_r \qquad \Rightarrow \qquad \left[D\right]\left\{\Phi\right\}_r=\lambda_r\left\{\Phi\right\}_r$$

$\{\Phi\}_r$ – modalni vektor pripadajućem vlastitom broju λ_r.

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

- Ako uzmemo u obzir svih n vlastitih vrijednosti λ_r tada n modalnih vektora $\{\Phi\}_r$ čini modalnu matricu $[\Phi]$ koja u sebi okuplja sve normalne oblike vibracija sustava, tj.:

$$[\Phi]_{n\,x\,n} = \left[\{\Phi\}_1, \quad \{\Phi\}_2, \quad \ldots \quad \{\Phi\}_n\right] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \ldots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \ldots & \phi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \ldots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

8.4.1 PROBLEM VLASTITIH VRIJEDNOSTI U IZRAŽEN POMOĆU KRUTOSTI

- Za neprigušene slobodne vibracije sustava s ***n*** stupnjeva slobode, vrijedi:

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\} \quad / \quad [m]^{-1}$$

$$[I]\{\ddot{x}\}+[D]\{x\}=\{0\}$$

gdje je $[D]=[m]^{-1}[k]$ – dinamička matrica (matrica sustava).

- Pretpostavimo harmonijski oblik rješenja:

$$\{x\}=\{A\}\sin \omega t$$

$$\{\ddot{x}\}=-\lambda\{A\}\sin \omega t, \qquad \lambda=\omega^2$$

$$[[D]-\lambda[I]]\{A\}=\{0\}$$

što je standardni problem vlastitih vrijednosti.

8.4.2 PROBLEM VLASTITIH VRIJEDNOSTI U IZRAŽEN POMOĆU POPUSTLJIVOSTI

- Za neprigušene slobodne vibracije sustava s ***n*** stupnjeva slobode, vrijedi:

$$[\mathrm{m}]\{\ddot{\mathrm{x}}\}+[\mathrm{k}]\{\mathrm{x}\}=\{0\} \quad / \quad [\mathrm{a}]=[\mathrm{k}]^{-1}$$

$$[\mathrm{a}][\mathrm{m}]\{\ddot{\mathrm{x}}\}+[\mathrm{I}]\{\mathrm{x}\}=\{0\}$$

gdje je [D]=[a][m] – dinamička matrica (matrica sustava).

- Pretpostavimo harmonijski oblik rješenja:

$$\{\mathrm{x}\}=\{\mathrm{A}\}\sin \omega t$$

$$\{\ddot{\mathrm{x}}\}=-\omega^2\{\mathrm{A}\}\sin \omega t$$

$$-\omega^2[\mathrm{D}]\{\mathrm{A}\}+[\mathrm{I}]\{\mathrm{A}\}=\{0\}$$

$$[[\mathrm{D}]-\lambda[\mathrm{I}]]\{\mathrm{A}\}=\{0\}, \quad \lambda=\frac{1}{\omega^2}$$

što je također standardni problem vlastitih vrijednosti, pri čemu su

$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots > \lambda_n$.

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

8.5 ORTOGONALNOST VLASTITIH (PRIRODNIH) OBLIKA

- s obzirom na matricu masa [m]
- s obzirom na matricu krutosti [k]

Za ***r-ti*** vlastiti oblik vrijedi: $[\mathrm{k}]\{\mathrm{A}\}_r - \omega_r^2[\mathrm{m}]\{\mathrm{A}\}_r = \{0\}$

- Promotrimo dva para različitih rješenja problema vlastitih vrijednosti: $\omega_r^2,\ \{\Phi\}_r$ ***i*** $\omega_s^2,\ \{\Phi\}_s$:

$$[\mathrm{k}]\{\Phi\}_r - \omega_r^2[\mathrm{m}]\{\Phi\}_r = \{0\} \quad / \ \{\Phi\}_s^T$$

$$[\mathrm{k}]\{\Phi\}_s - \omega_s^2[\mathrm{m}]\{\Phi\}_s = \{0\} \quad / \ \{\Phi\}_r^T$$

$$\{\Phi\}_s^T[\mathrm{k}]\{\Phi\}_r - \omega_r^2\{\Phi\}_s^T[\mathrm{m}]\{\Phi\}_r = \{0\} \quad (1)$$

$$\{\Phi\}_r^T[\mathrm{k}]\{\Phi\}_s - \omega_s^2\{\Phi\}_r^T[\mathrm{m}]\{\Phi\}_s = \{0\} \quad (2)$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

- Kako su [k] i [m] simetrične matrice: $[k]=[k]^T$ i $[m]=[m]^T$, transponiranjem jednadžbe (2) dobijemo:

$$\{\Phi\}_s^T[\mathrm{k}]\{\Phi\}_r - \omega_s^2\{\Phi\}_s^T[\mathrm{m}]\{\Phi\}_r = \{0\} \quad (3)$$

- Ako sada od jednadžbe (3) oduzmemo jednadžbu (1), dobije se:

$$\left(\omega_r^2 - \omega_s^2\right)\{\Phi\}_s^T[\mathrm{m}]\{\Phi\}_r = \{0\}$$

- Za oblike bitno različitih fekvencija ($\omega_r \neq \omega_s$) mora vrijediti

$$\{\Phi\}_s^T[\mathrm{m}]\{\Phi\}_r = \{0\} \qquad \omega_r \neq \omega_s$$

  Stoga kažemo da su ***r**-ti* i ***s**-ti* vlastiti oblik **ORTOGONALNI** s obzirom na matricu masa.

- Kako također vrijedi $\{\Phi\}_s^T[\mathrm{k}]\{\Phi\}_r = \{0\}$

  kažemo da su ***r**-ti* i ***s**-ti* vlastiti oblik **ORTOGONALNI** s obzirom na matricu krutosti.

- Uvjeti ortogonalnosti vlastitih oblika temelj su metode superpozicije oblika ili modalne analize.

8.6 GENERALIZIRANE MATRICE MASA I KRUTOSTI

- Uvjeti ortogonalnosti s obzirom na masu, za r=s:

$$\{\Phi\}_r^T [\mathrm{m}] \{\Phi\}_r = M_r$$

Generalizirana ili modalna masa r-tog oblika

- Uvjeti ortogonalnosti s obzirom na krutost, za r=s:

$$\{\Phi\}_r^T [\mathrm{k}] \{\Phi\}_r = K_r$$

Generalizirana ili modalna krutost r-tog oblika

- Pri tome je

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_r}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

8.6 GENERALIZIRANE MATRICE MASA I KRUTOSTI

- Za cjelokupni konstruktivni sustav vrijedi:

$$[\mathrm{M}] = \{\Phi\}^{\mathrm{T}} [\mathrm{m}] \{\Phi\}$$

generalizirana ili modalna matrica masa

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & M_n \end{bmatrix}_{n\,x\,n}$$

$$[\mathrm{K}] = \{\Phi\}^{\mathrm{T}} [\mathrm{k}] \{\Phi\}$$

generalizirana ili modalna matrica krutosti

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & K_n \end{bmatrix}_{n\,x\,n}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

8.7 PRIBLIŽNE METODE ZA PROCJENU OSNOVNE FREKVENCIJE - RAYLEIGHEVA METODA

- Problem vlastitih vrijednosti sustava s više stupnjeva slobode:

$$\lambda [m][\Phi] = [k][\Phi]$$

gdje je $\lambda = \omega^2$

$[m]$, $[k]$ – simetrične matrice

$[\Phi]$ – modalna matrica

- Za ***r**-ti* je vlastiti oblik:

$$\lambda_r [m][\Phi]_r = [k][\Phi]_r \quad / \quad [\Phi]_r^T$$

$$\lambda_r [\Phi]_r^T [m][\Phi]_r = [\Phi]_r^T [k][\Phi]_r$$

$$\lambda_r = \frac{[\Phi]_r^T [k][\Phi]_r}{[\Phi]_r^T [m][\Phi]_r} \equiv \frac{V}{T}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE
MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

- Ako modalni vektor $\{\Phi\}_r$ zamijenimo proizvoljnim vektorom $\{A\}$:

$$\lambda_r = R(\{A\}) = \frac{[A]^T[k][A]}{[A]^T[m][A]}$$

gdje je R({A}) – Rayleighev kvocijent, pri čemu je $\lambda_1 \leq R(\{A\}) \leq \lambda_n$

$$\lambda_R = \omega_R^2 = R(\{A\})$$

- Točnost Rayleigheve frekvencije ω_r ovisi isključivo o vektoru pomaka {A} kojim opisujemo oblik vibracija.
- Razumna je pretpostavka vektora pomaka {A}:

  Vektor statičkih pomaka usljed djelovanja na koncentrirane mase silama proporcionalnim njihovim težinama.