

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

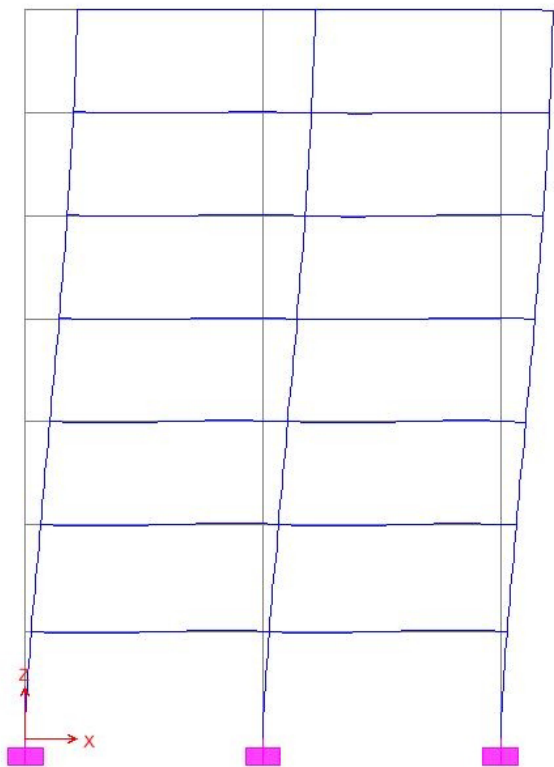
9 *Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA*

- **Ako se vlastiti oblici (prirodni modovi) vibracija sustava s n stupnjeva slobode upotrijebe kao generalizirane koordinate s ciljem definiranja njegova odziva, n jednadžbi gibanja postaje neovisno. S takvim koordinatama svaka od neovisnih jednadžbi rješava se zasebno kao da odgovara pojedinom sustavu s jednim stupnjem slobode (SDOF).**
- **Odziv sustava s n stupnjeva slobode (MDOF) metodom superpozicije oblika određuje se sumiranjem odziva pojedinih oblika.**

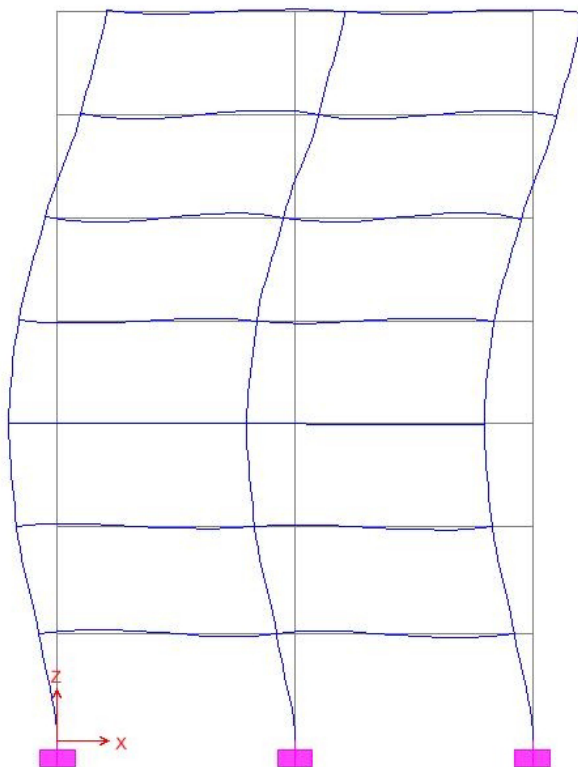
SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA

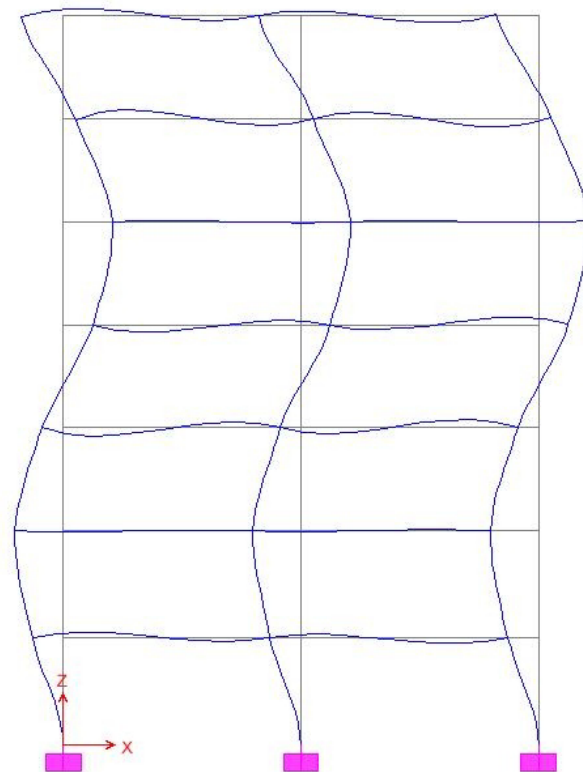
Deformed Shape (MODAL) - Mode 1 - Period 1,27321



Deformed Shape (MODAL) - Mode 2 - Period 0,43128



Deformed Shape (MODAL) - Mode 3 - Period 0,24204



SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA

- Početni proračuni:
 - Formiranje matrice masa $[m]$, matrice popustljivosti $[a]$ ili matrice krutosti $[k]$ i vektora vanjskih sila $\{F(t)\}$
 - Određivanje vlastitih frekvencija i vektora oblika $\{u\}$ (rješenjem problema vlastitih vrijednosti):
 - a) metoda karakterističnog polinoma ili determinante
 - Problem vlastitih vrijednosti definiran je jednačbom

$$[m]\{\ddot{u}\} - \lambda[k]\{u\} = \{0\}, \quad \lambda = 1/\omega^2$$

$$([D] - \lambda[I])\{u\} = \{0\}, \quad [D] = [a][m]$$

$$\det([D] - \lambda[I]) = 0 \Rightarrow \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}, \quad T_i = \frac{2\pi}{\omega}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA

■ Početni proračuni:

- Vektori oblika vibriranja su međusobno ortogonalni vektori u odnosu na matricu masa. Ukoliko njihov umnožak normiramo, tada kažemo da su vektori ortonormirani u odnosu na matricu masa i vrijedi:

$$\{\bar{\mathbf{u}}\}_i^T [\mathbf{m}] \{\bar{\mathbf{u}}\}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\{\bar{\mathbf{u}}\}_j = \alpha_i \{\mathbf{u}\}_i$$

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{1}{\{\mathbf{u}\}_i^T [\mathbf{m}] \{\mathbf{u}\}_i}}$$

- Modalna matrica (matrica transformacije) skup je vektora oblika:

$$[\Phi] = [\{\bar{\mathbf{u}}\}_1 \quad \{\bar{\mathbf{u}}\}_2 \quad \dots \quad \{\bar{\mathbf{u}}\}_n]$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA

■ Početni proračuni:

b) metoda matične iteracije

- Polazimo od jednadžbe:

$$[D]\{u\} - \frac{1}{\omega^2}\{u\} = \{0\}$$

- Pretpostavimo prvi vektor pomaka $\{u\}_i$
- Iteriramo dok resultantni vektor pomaka ne bude jednak početnom
- Ortonormiramo vektore oblika
- Formiramo modalnu matricu

■ Provjera ortogonalnosti normiranih vektora oblika

$$[\Phi]^T [m] [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [\Phi]^T [k] [\Phi] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA

- Početni proračuni:

- Transformacija sustava u sustav nezavisnih diferencijalnih jednažbi pomoću modalne matrice $[\Phi]$

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \quad / \quad [\Phi]^T \quad / \quad [\Phi][\Phi]^{-1}$$

$$[\Phi]^T [m][\Phi][\Phi]^{-1} \{\ddot{x}\} + [\Phi]^T [c][\Phi][\Phi]^{-1} \{\dot{x}\} + [\Phi]^T [k][\Phi][\Phi]^{-1} \{x\} = [\Phi]^T \{F(t)\}$$

$$[\Phi]^T [m][\Phi] = [I], \quad [\Phi]^T [c][\Phi] = [2\xi\omega] \quad [\Phi]^T [k][\Phi] = [\omega^2]$$

$$\{\ddot{\eta}\} + [2\xi\omega]\{\dot{\eta}\} + [\omega^2]\{\eta\} = \{f(t)\}$$

- Odabir odgovarajućeg vremenskog intervala numeričke integracije

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{10}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA

- Proračuni za svaki pojedinačni vremenski korak:
 - Zasebni iterativni proračuni svake pojedinačne nezavisne jednačbe nekom od numeričkih metoda (metoda inetrpolacije uzbude, metoda konačnih diferenci, Newmarkova metoda)
 - Određivanje tzv. modalnih veličina (pomaka, brzina i ubrzanja)

$$\{\eta\}_{i+1}, \quad \{\dot{\eta}\}_{i+1}, \quad \{\ddot{\eta}\}_{i+1}$$

- Transformacija modalnih u stvarne pomake, brzine i ubrzanja cjelokupnog sustava

$$[\Phi]^{-1} \{\ddot{\mathbf{x}}\} = \{\ddot{\eta}\} \quad \Rightarrow \quad \{\ddot{\mathbf{x}}\} = [\Phi] \{\ddot{\eta}\}$$

$$[\Phi]^{-1} \{\dot{\mathbf{x}}\} = \{\dot{\eta}\} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{\mathbf{x}}\} = [\Phi] \{\dot{\eta}\}$$

$$[\Phi]^{-1} \{\mathbf{x}\} = \{\eta\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{x}\} = [\Phi] \{\eta\}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

10 Određivanje dinamičkog odziva pomoću direktne integracije

- **Jednadžbe gibanja općeg sustava s više stupnjeva slobode:**

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\}$$

gdje su $[m]$, $[c]$, $[k]$ = matrice masa, prigušenja i krutosti
 $\{F(t)\}$ = vektor vanjskih sila
 $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$, $\{x\}$ = vektori ubrzanja, brzina i pomaka.

- **Direktnom se integracijom ove diferencijalne jednadžbe integriraju numeričkom metodom u koracima. "Direktno" znači da nema transformacija jednadžbi u neki alternativni koordinatni sustav (kao što je to slučaj u modalnoj analizi) već se one rješavaju "direktno" u vezanom obliku.**
- **Vremensko područje u kojem tražimo rješenje dijeli se na diskretne vremenske intervale Δt , te se algoritmom direktne integracije dobiva rješenje u trenutku $t+\Delta t$ pomoću poznatog rješenja u trenutku t , počev od $t=0$.**

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

10.1 Metoda centralnih diferenci

Početni proračuni:

Formiranje matrice krutosti $[k]$, matrice masa $[m]$ i matrice prigušenja $[c]$

Definiranje početnih uvjeta $\{x\}_0$ i $\{\dot{x}\}_0$

Proračun početnog ubrzanja $\{\ddot{x}\}_0$:

$$\{\ddot{x}\}_0 = [m]^{-1} (\{F(0)\} - [c]\{\dot{x}\}_0 + [k]\{x\}_0)$$

Odabir koraka integracije Δt , tako da je $\Delta t < \Delta t_{cr} = T_n / \pi$ i proračun konstanti integracije

$$a_0 = \frac{1}{(\Delta t)^2} \quad a_1 = \frac{1}{2 \Delta t} \quad a_2 = 2a_0 \quad a_3 = \frac{1}{a_2}$$

Proračun pomaka $\{x\}_{-\Delta t}$

$$\{x\}_{-\Delta t} = \{x\}_0 - \Delta t \{\dot{x}\}_0 + a_3 \{\ddot{x}\}_0$$

Formiranje efektivne matrice masa

$$[\hat{m}] = a_0 [m] + a_1 [c]$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

10.1 Metoda centralnih diferenci

Za svaki korak integracije:

Proračun efektivnog vektora sila u trenutku vremena t

$$\{\hat{F}\}_t = \{F\}_t - [[\mathbf{k}] - a_2 [\mathbf{m}]]\{x\}_t - [a_0 [\mathbf{m}] - a_1 [\mathbf{c}]]\{x\}_{t-\Delta t}$$

Određivanje pomaka u trenutku vremena t+Δt

$$[\hat{\mathbf{m}}]\{x\}_{t+\Delta t} = \{\hat{F}\}_t \rightarrow \{x\}_{t+\Delta t} = [\hat{\mathbf{m}}]^{-1} \{\hat{F}\}_t$$

Određivanje ubrzanja i brzina u trenutku t

$$\{\ddot{x}\}_t = a_0 (\{x\}_{t-\Delta t} - 2\{x\}_t + \{x\}_{t+\Delta t})$$

$$\{\dot{x}\}_t = a_1 (-\{x\}_{t-\Delta t} + \{x\}_{t+\Delta t})$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

10.2 Newmarkova integracijska metoda

Početni proračuni:

Formiranje matrice krutosti $[\mathbf{k}]$, matrice masa $[\mathbf{m}]$ i matrice prigušenja $[\mathbf{c}]$

Definiranje početnih uvjeta $\{\mathbf{x}\}_0$ i $\{\dot{\mathbf{x}}\}_0$

Proračun početnog ubrzanja $\{\ddot{\mathbf{x}}\}_0$:

$$\{\ddot{\mathbf{x}}\}_0 = [\mathbf{m}]^{-1} (\{F(0)\} - [\mathbf{c}]\{\dot{\mathbf{x}}\}_0 + [\mathbf{k}]\{\mathbf{x}\}_0)$$

Odabir koraka integracije Δt , parametara α i δ te proračun konstanti integracije

$$\delta \geq 0,50 \quad \alpha \geq 0,25(0,50 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad a_7 = \delta \Delta t$$

Formiranje efektivne matrice krutosti

$$[\hat{\mathbf{k}}] = [\mathbf{k}] + a_0[\mathbf{m}] + a_1[\mathbf{c}]$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

10.2 Newmarkova integracijska metoda

Za svaki korak integracije:

Proračun efektivnog vektora sila u trenutku vremena $t+\Delta t$

$$\begin{aligned} \{\hat{F}\}_{t+\Delta t} &= \{F\}_{t+\Delta t} + [\mathbf{m}](a_0 \{x\}_t + a_2 \{\dot{x}\}_t + a_2 \{\ddot{x}\}_t) \\ &\quad + [\mathbf{c}](a_1 \{x\}_t + a_4 \{\dot{x}\}_t + a_5 \{\ddot{x}\}_t) \end{aligned}$$

Određivanje pomaka u trenutku vremena $t+\Delta t$

$$[\hat{\mathbf{k}}]\{x\}_{t+\Delta t} = \{\hat{F}\}_{t+\Delta t} \rightarrow \{x\}_{t+\Delta t} = [\hat{\mathbf{k}}]^{-1} \{\hat{F}\}_{t+\Delta t}$$

Određivanje ubrzanja i brzina u trenutku $t+\Delta t$

$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = a_0 (\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t) - a_2 \{\dot{x}\}_t - a_3 \{\ddot{x}\}_t$$

$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{x}\}_t + a_6 \{\ddot{x}\}_t + a_7 \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}$$